ISSN: 3030-3346

# КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ В ВЯЗКО-УПРУГО-ИНЕРЦИОННЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕДАХ

*Мирзоев Акмал Ахадович[1],Фахриддинова Райхона Вахобжон кизи[2]*

*[1] ИМ и СС АН РУз, Ташкент, Email: akmal.mirzoev78@mail.ru*
*[2] НавГУ, Навои,*
*Email: akmal.mirzoev78@mail.ru*

*KEYWORDS*

Реология, вязкоупругие среды, вязко-инерционные среды, перенос импульса, гиперболические уравнения, распространение волн, определяющие соотношения, механика сплошных сред, многофазные среды, вычислительное моделирование

*ABSTRACT*

В работе разработана новая континуальная модель переноса количества движения в вязкоупругих и вязко-инерционных деформируемых средах. Предлагаемый подход расширяет классическую гидродинамическую теорию за счёт учёта молярного переноса количества движения, возникающего вследствие пространственной неоднородности полей ускорений и скоростей относительного объемного деформирования среды. Получены новые обобщённые реологические соотношения, содержащие дополнительные инерционно-реологические компоненты, и на их основе выведено модифицированное уравнение движения. Проведённый математический анализ показал, что полученное уравнение имеет гиперболический тип и допускает распространение волновых возмущений в вязких, вязкоупругих и вязко-инерционных деформируемых средах. Предложенная модель обеспечивает физически обоснованную основу для формирования обучающих данных, разработки физически информированных нейронных сетей (PINNs), создания цифровых двойников и применения методов искусственного интеллекта для интеллектуального моделирования и прогнозирования процессов переноса в сложных инженерных и природных системах.

## Введение

Одной из фундаментальных задач механики сплошных сред (МСС) является описание процессов переноса количества движения в движущихся жидкостях и деформируемых средах. Классическая теория гидродинамики основывается на уравнениях движения вязкой жидкости, известных как уравнения Навье–Стокса, которые выражают закон сохранения импульса для сплошной среды. В рамках этой теории предполагается, что касательные напряжения пропорциональны градиентам скорости. Это предположение лежит в основе ньютоновской модели вязкости:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Несмотря на широкую применимость данной модели, многочисленные экспериментальные исследования показывают, что в сложных средах – суспензиях, эмульсиях, гидросмесях и многофазных система – механизмы переноса количества движения существенно отличаются от ньютоновских.

В таких средах наблюдаются:

- наличие предельного напряжения сдвига,
- вязкопластическое поведение,
- неравномерное распределение скорости в пристенной области,
- волновые процессы в потоке.

(cc) BY 

Эти эффекты свидетельствуют о существовании дополнительных механизмов переноса импульса, не учитываемых в классической теории.

Современные исследования в области реологии показывают, что поведение вязкоупругих жидкостей определяется взаимодействием вязких и упругих свойств среды. В частности, для таких сред характерно существование релаксационных процессов и гиперболических режимов переноса импульса. Целью настоящей работы является разработка новой математической модели переноса количества движения, учитывающей молярный обмен импульсом, обусловленный пространственной неоднородностью полей ускорения и объемной деформации.

## II. Физические предпосылки модели

Рассмотрим деформируемую сплошную среду, состоящую из структурных элементов различного масштаба. При движении такой среды происходит непрерывный обмен субстанцией: массой, количеством движения, концентрацией, энергией.

Вследствие этого изменяется напряженно-деформированное состояние (НДС) среды, т.е. надо будет учитывать сложную комбинацию различных реологических моделей.

В классической МСС перенос количества движения (импульса) обусловлен диффузией импульса. Однако в реальных средах существенную роль играют также: пространственная неоднородность ускорений, объемные деформации среды.

$$\tau_{ij} = m_{\ell} \frac{\partial W_i}{\partial x_j} - Q_i \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x_j}, \quad (1)$$

где $m_e$ и $Q_i$ - соответственно линейная плотность и массовый расход в направлении $i$, $W_i$ и $\dot{\theta}$- соответственно $i$ - я компонента ускорения и скорости относительного объемного расширения (сжатия).

**Реологические соотношения**

С учётом вязкой диссипации и инерционных эффектов тензор напряжений можно представить для более общего случая получены реологические уравнения в виде:

$$\tau_{ij} = G\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \mu\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i}\right) + m_e\left(\frac{\partial W_i}{\partial x_j} + \frac{\partial W_j}{\partial x_i}\right), \quad (2)$$

$u_i$, $\upsilon_i$ - компоненты смещения и скорости.

Выведено уравнение движения с учетом силы реакции молярного переноса

$$T_* \rho \frac{d^2 \upsilon}{d t^2} + \rho \frac{d \upsilon}{d t} - T_* \omega^2 \rho V = \rho F + div P_1, (3)$$

$$\omega_i = \frac{\dot{\rho}^2}{\rho} - WV^{-1}\frac{\dot{\rho}}{\rho} - T_*^{-1}\frac{\dot{\rho}}{\rho}, \ \omega_\rho^2 = \ddot{\theta} - \dot{\theta}^2,$$
$$T_* = (\beta \rho V_{*\ell}),$$

где $T_*$ - время релаксации, $\omega$ - частота, $P_1$ - тензор напряжения, $F$ - массовая сила.

Первый член реологического уравнения (3) – поток, обусловленный пространственной неоднородностью поля ускорения.

Реологическое уравнение (3) по физико-механическому смыслу отличается от существующих тем, что второй член в правой части (3) характеризует перенос пространственной неоднородности скорости расширения (сжатия) $\partial \dot{\theta} / \partial x_j$ массовым расходом (поток массы) $Q_i$, т.е. сжимающийся со скоростью $\dot{\theta}$ и изменяющийся в направлении $x_j$ объем переносится потоком массы в перпендикулярном к $x_j$ направлении.

Физическая основа (реологические уравнения) и вывод уравнения движения упруго- вязко-инерционно деформируемых жидкостей в отличие от существующих учитывают молярный перенос количества движения, обусловленный пространственной неоднородностью поля ускорений и поля скоростей относительного объемного расширения (сжатие).

Экспериментально подтверждено явленно объемного расширения жидкостей при относительном неравномерном движении ее

(cc) BY 

частей [2].

Результатами решений конкретных задач на основе разработанной модели для случая движения вязко-инерционно деформируемых жидкостей объясняется происхождение предельного напряжения сдвига, предсказаны области проявления вязкопластических свойств движущейся жидкости, выявлен эффект, заключающийся в увеличении скорости в пристенной области, обусловленной молярным обменом количества движения [2-4].

Пусть плотность потока количества движения имеет вид

Как указывалось, в [3], при движении сред, состоящих из разного уровня частиц (структурных и кинематических образований), происходит деформация внутренних полей, меняются силы инерции и поэтому нарушаются условия равновесия. По мере движения сред устанавливается новое внутреннее равновесие, при котором размеры и формы частиц удовлетворяют данному движению. Таким образом, при движении сред происходит непрерывный процесс обмена массой, количеством движения и энергией между составляющей (частицами) среде и, следовательно, непрерывное изменение напряженно-деформационного состояния (НДС), как отдельных частиц, так и среды в целом.

Т.Дж. Блек [5] теоретически рассмотрел вопрос о наличии в потоке своеобразных поперечно направленных к потоку микроструй. В основу данной теории легло предположение о том, что в ламинарном подслое могут существовать процессы вязкой стабилизации и невязкие выбросы, возникающие за счет пульсации давления. Таким образом, пограничный слой не делится, как принято в классических теориях несколько слоев, а подразделяется во времени на периоды медленно вязкого развития и невязкого разрушения образовавшейся структуры. При этом получено следующее между частотой разрушения и динамической скоростью:

$$\frac{\tilde{\omega}\nu}{V_*^2} = 0{,}056.$$

Для более общего случая данное равенство можно запасать в виде:

$$V_* = \alpha_1 (\omega\nu)^{\frac{1}{2}}. \qquad (4)$$

Подставив в уравнение (4) из работы [4] получим:

$$W = -\alpha_1 (\omega\nu)_{\ell}^{\frac{1}{2}} V. \qquad (5)$$

Заменив ускорение во втором члене подынтегрального выражения правой части (4) выражением (5), находим:

$$\int F_* V dt = \int x\rho[-V\, div\dot{P} + \alpha_1 V(\tilde{\omega}\nu)^{\frac{1}{2}}\, grad\, P - VW\dot{\rho} - V^2 \frac{\dot{\rho}^2}{\rho} - V^2\ddot{\rho} - \rho V\dot{W}]dt.$$

*(6)*

которое удовлетворяется, если в каждый момент времени справедливо:

$$F_* = x[-div\dot{P} + \alpha_1(\tilde{\omega}\nu)_{\ell}^{\frac{1}{2}}\, grad\, P - W\dot{\rho} + V\left(\frac{\dot{\rho}^2}{\rho} - \ddot{\rho}\right) - \rho\dot{W}].$$

*(7)*

Предположение в уравнении (7) о постоянстве давления и плотности приводит к выражению для силы реакции:

$$F_* = -\frac{1}{\rho V_{*\ell}} \frac{d^2V}{dt^2}. \qquad (8)$$

подобно силе реакции поля излучения ускоренно, но медленно движущегося заряда [8].

Таким образом, полученная сила реакция молярного переноса количества движения (7) прямо пропорциональна изменениям плотности, давления и ускорения. Здесь встречается своеобразная сила, неизвестная в механике, представленная в (7) зависимостью силы реакции от ускоренного изменения плотности и изменения ускорения, как во времени, так и в пространстве. В результате выявлено, что при молярном переносе количества движения в средах проявляются ускоренные (неравномерные) изменения плотности и скорости. Ускоренные изменения

(cc) BY 

плотности среды обусловлены ускоренными деформациями элементарных объемов сред.

**Молярный перенос количества движения с учетом ускоренными деформациями элементарных объемов сред**

Определим, к каким специфическим НДС приводит молярный перенос количества движения. Для этого уравнение изменения плотности количества движения в $i$- ом направлении запишем в виде:

$$W_i + V_i \frac{\dot{\rho}}{\rho} = \beta\ V_{*\ell} V_i. \qquad (9)$$

Изменение силы (9) в направлении $j$ будет иметь вид:

$$\rho V_{*\ell}\left(1-\frac{1}{\beta V_*}\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial W_i}{\partial x_j} + V_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} - \beta V_{*\ell}\right). \quad (10)$$

Так как [1]:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\mu}\tau_{ij}, \qquad (11)$$

учет в уравнении (10) равенства (11) приводит:

$$\tau_{ij} = \frac{\mu}{\beta_2 V_{*\ell}}\frac{\partial W_i}{\partial x_j} - \frac{\mu V_i}{\beta_2 V_{*\ell}}\frac{\partial \theta}{\partial x_j}. \qquad (12)$$

Из (12) следует, что причина молярного переноса количества движения – пространственная неоднородность поля ускорения и поля скоростей относительного объемного расширения (сжатия). Коэффициент при ускоренной деформации - $\ddot{\gamma}_{ij} = \partial W_i / \partial x_j$ можем записать таким образом:

$$\frac{\mu}{\beta_2 V_{*\ell}} = \frac{\rho \nu \alpha \ell_*}{\beta_2 V_*} = \frac{\alpha}{\beta_2}\rho \ell_*^2 = m_\ell.$$

Коэффициент при $\dfrac{\partial \theta}{\partial x_j}$ имеет размерность массового расхода, поэтому записав массовый расход в направлении $i$ в виде:

$$q_i = \frac{\beta_2}{\beta_1} = m_\ell V_i, \qquad (13)$$

получаем, что в действительности это перенос массы в единице длины $m_\ell$ со скоростью $V_i$ в направлении $i$. Таким образом, уравнение (12) можно записать в виде:

$$\tau_{ij} = m_\ell \ddot{\gamma}_{ij} - q_i \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x_j}. \qquad (14)$$

При незначительности ускоренной деформации $\ddot{\gamma}_{ij} \cong 0$ из (14) находим:

$$\tau = -q_i \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x_j}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \qquad (15)$$

Уравнение (14) можно приводит к виду:

$$\tau_{ij} = G\gamma_{ij} + m_\ell \ddot{\gamma}_{ij}, \qquad (16)$$

где $G = \dfrac{mE}{2(m+1)}$, $m$ - обратный коэффициент Пуассона, $E$ - модуль продольной упругости.

В результате выявлено, что при молярном переносе количества движения в средах проявляются ускоренные (неравномерные) изменения плотности и скорости. Ускоренные изменения плотности среды обусловлены ускоренными деформациями элементарных объемов сред.

**Гиперболическое уравнение переноса импульса**

С учетом диссипативной части деформации, т.е. вязкой диссипации, получаем выражение:

$$\tau_{ij} = G\gamma_{ij} + \mu\ddot{\gamma}_{ij} + m_e \ddot{\gamma}_{ij}, \quad (i \neq j) \qquad (17)$$

для нормальных напряжений $(i = j)$ выражение:

$$\sigma_i = \bar{\sigma} - [1 + T_* \alpha (\tilde{\omega}\nu)_\ell^{\frac{1}{2}}]p - T_* \dot{p} +$$
$$2(G\varepsilon_i + \mu\dot{\varepsilon}_i + m_e\ddot{\varepsilon}_i) - \frac{2}{3}(G\theta + \mu\dot{\theta} + m_e\ddot{\theta}).$$

(cc) BY 

(18)

Полагая, как в [4], что $\bar{\sigma} = -p$, а учитывая, $p = -K\theta$, $(K = E/3(1-2n)$ - модуль объемной упругости, $n$ - коэффициент Пуассона), имеем:

$$\sigma_i = 2(G\varepsilon_i + \mu\dot{\varepsilon}_i + m_e\ddot{\varepsilon}_i) + \frac{2}{3}\left\{\left[-G + 3K\left(1-\frac{\alpha_2}{2}\right) + T_*\dot{K}\right]\theta + \mu\left(-1+\frac{2}{3}K\frac{T_*}{\mu}\right)\dot{\theta} + m_e\ddot{\theta}\right\},$$

(19)

где $\alpha_2 = T_*\alpha_1\,(\tilde{\omega}\nu)_\ell^{\frac{1}{2}}$.

Введем обозначения $\mu' = KT_*$, $G' = K - \alpha_2 + T_*K$.

Уравнение (19) запишем в виде:

$$\sigma_i = 2(G\varepsilon_i + \mu\dot{\varepsilon}_i + m_e\ddot{\varepsilon}_i) - \left[\left(\frac{2}{3}G - G'\right)\theta + \left(\frac{2}{3}\mu - \mu'\right)\dot{\theta} + m_e\ddot{\theta}\right].$$

В частности, получим уравнение относительно компонент смещения в виде:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \left(\frac{4G-3G'}{3\rho}\right)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{m_e}{\rho}\frac{\partial^4 u_x}{\partial t^2\partial x^2} + T_*\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}\right) - T_*\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{4\mu-3\mu'}{3T_*\upsilon}\right)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \omega_i^2 u_x\right) = T_*\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\,\partial t}\left(\frac{3m_e}{\rho T_*}\frac{\partial^3 u_x}{\partial x^2\,\partial t}\right) - T_*\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\,\partial t}\left(-\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial u_x}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\,\partial t} - \frac{m_e}{\rho}\frac{\partial^4 u_x}{\partial x^3\partial t}\right) - \frac{\partial u_x}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\,\partial t} + T_*\frac{\partial u_x}{\partial t}\frac{\partial^3 u_x}{\partial x^2\partial t}\right) + F_x.$$

(20)

При отсутствии массовых сил и незначительности нелинейных членов относительно линейных из последнего уравнения получаем:

$$\frac{1}{T_*}\left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \left(\frac{4G-3G'}{3\rho}\right)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{m_e}{\rho}\frac{\partial^4 u_x}{\partial t^2\partial x^2}\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \left(\frac{4\mu-3\mu'}{3\rho T_*}\right)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \omega_i^2 u_x\right] = 0.$$

(21)

**Заключение**

Аналогичное уравнение получил В.Н.Николаевский [5] в разработанной им модели временного развития процессов в сейсмоактивной среде. Часть уравнения, как видно из (21), содержащаяся в первой квадратной скобке, соответствует линейному уравнению Буссинеска. Считая, что упругие и инерционные деформации отсутствуют, а также пренебрегая конвективным энергетическим и силовым переносами, получаем:

$$T_*\rho\frac{d^2V_x}{dt^2} - \rho\frac{\partial V_x}{\partial t} = \rho F_x + \left(\frac{\mu+3\mu'}{3\rho T_*}\right)\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + T_*\omega_i^2\rho V_x.$$

*(22)*

При отсутствии внешней силы и незначительности последнего члена правой части уравнения (22), имеем:

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial t^2} + \frac{1}{T_*}\frac{\partial V_x}{\partial t} = \left(\frac{\mu+3\mu'}{3T_*\rho}\right)\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}. \quad (23)$$

Данное уравнение относится к гиперболическому типу. Подобное уравнение получено Л.Г.Лойцянским [8], который обосновал существенность учета процессов релаксации в потоках жидкости.

Таким образом, по полученной математической модели движения жидкостей или текучих сред, можно описать специфические волновые процессы, обусловленные молярными процессами в движущейся жидкости (сред).

Разработана новая математическая модель вязкоупруго-инерционно деформируемых сред, учитывающая молярный перенос количества движения, обусловленный пространственной неоднородностью поля ускорений и скоростей объемных деформаций.

Полученные реологические соотношения приводят к модифицированному уравнению движения гиперболического типа, которое позволяет описывать волновые процессы в вязких средах.

Предложенная модель расширяет классическую теорию гидродинамики и может применяться для анализа течений сложных

(cc) BY

многофазных сред.

**Список литературы:**

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
2. Файзуллаев Д.Ф., Хусанов И.Н., Джалалов Б.Д., Алимухамедов Ш.И., Сейдаметова З.С. Явления объемного расширения жидкости при ее движении // Изв. АН УзССР, Сер. техн. наук, № 5, 1987. С. 80–81.
3. Мирзоев А.А., Хусанов И.Н., Ходжаев Я.Д., Хажиматова М.М. Многофазные среды со сложной реологией и их механические модели // Доклады XI Всеросс. съезда по фундамен. проблем. теор. и прикл. механики, Казан, Россия, 2015, С. 2558-2561.
4. Хусанов И.Н. Математическая модель сжимаемой деформируемой сплошной среды с несколькими временами релаксации // Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, № 60086. 22 с.
5. Блэк Т.Дж. Некоторые практические приложения новой теории: турбулентности пристенного слоя. ... М.: Энергия, 1970, 287 с..
6. Измайлов С.В. Курс электродинамики. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1962. 439 с.
7. Николаевский В.Н. Вязкоупругость с внутренними осцилляторами как возможная модель сейсмоактивности среды // ДАН СССР, 1985. Т.283, № 6. С.1312-1324.
8. Лойцянский Л.Г. Наследственные явления в турбулентных движениях // Изв. АН СССР.1982, № 2. С. 5-19.
9. Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid Mechanics. Elsevier, 2013.
10. Bird R., Stewart W., Lightfoot E. Transport Phenomena. Wiley, 2007.
11. Boyaval S. Hyperbolic models of viscoelastic flows. Journal of Fluid Mechanics, 2017.
12. Dumbser M., Peshkov I., Romenski E. Hyperbolic formulation of continuum mechanics. Journal of Computational Physics, 2016.
13. Chorin A., Marsden J. A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics. Springer, 2000.
14. Mirzoev A.A. Rheology of complex multiphase media. Tashkent, 2015.

(cc) BY 