ДИНАМИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ КОМАНДЫ В ИТ-ПРОЕКТАХ С УЧЁТОМ НАКОПЛЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКОГО ДОЛГА

Шарипов Элбек Жуманазарович[1], Яхшибаев Дониёр Султанбаевич[1]

1Ассистент кафедры технологий программирования, Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий, Ташкент, Узбекистан
E-mail: elbekreu@gmail.com
Кандидат технических наук, профессор, Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада аль-Хорезми, Ташкент, Узбекистан,
E-mail: donik9202@mail.ru

K E Y W O R D S

ИТ-проект, технический долг, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, теневые цены, распределение ресурсов, равновесие, устойчивость, бэклог, рефакторинг, численное моделирование

A B S T R A C T

Предложена динамическая математическая модель распределения мощности команды в ИТ-проекте, в которой технический долг введён как самостоятельная фазовая переменная x2, связанная с бэклогом x1 контуром отрицательной обратной связи: долг снижает множитель эффективности 1−σx2 в уравнении выполнения задач. Поставлена задача оптимального управления долей мощности u(t), направляемой на разработку; получены гамильтониан, сопряжённая система и замкнутый закон управления u*=projU{…}, допускающий истолкование через теневые цены. Показано, что стандартный аргумент достаточности по знаку ∂2H/∂u2 недостаточен, и предложен численный сертификат оптимальности. Для положения равновесия найдены выражения в замкнутой форме, коридор допустимых значений управления [0,2975; 0,7393] и критерий асимптотической устойчивости σx2*<1/2. Задача решена двухэтапным алгоритмом (монотонный проективный градиентный спуск и коллокационное решение краевой задачи); порядок схемы Эйлера подтверждён (≈1,00), результат не зависит от начального приближения. На горизонте T=12 оптимальное управление имеет трёхфазную структуру с «окном рефакторинга» u*≤0,65 на интервале t∈[5,81; 9,14] и обеспечивает J*=26,504, что на 4,17 % ниже номинальной и на 14,48 % ниже агрессивной стратегии; уровень технического долга в конце горизонта в 1,98 раза ниже, чем при агрессивной стратегии.

I. Введение

A. Постановка проблемы

Разработка программного обеспечения отличается от производственных процессов наличием явления, не имеющего прямых аналогов в промышленности, — технического долга. Метафора, предложенная У. Каннингемом [1] и развитая в работе [2], описывает совокупность компромиссных технических решений, принятых ради ускорения выпуска функциональности и требующих последующей переработки: как и финансовый долг, он «обслуживается» процентами в виде дополнительных усилий при каждом последующем изменении кодовой базы. Накопленный долг замедляет внесение изменений, повышает вероятность дефектов и в итоге снижает фактическую производительность команды. Эмпирические исследования, в том числе работы [3], фиксируют, что разработчики теряют заметную долю рабочего времени из-за технического долга, а систематические обзоры [4], [5] показывают, что управление долгом стало самостоятельным направлением инженерии программного обеспечения.

Из этого следует управленческая дилемма. Направляя всю мощность команды на разработку нового функционала, руководитель быстро сокращает очередь невыполненных задач (бэклог), но накапливает долг, который в дальнейшем замедляет ту же разработку. Напротив, чрезмерное внимание к рефакторингу снижает текущую скорость выпуска.

(cc) BY

Следовательно, требуется найти оптимальное во времени распределение мощности между двумя видами деятельности, причём оптимум зависит не только от текущего состояния проекта, но и от того, сколько времени остаётся до конца планового горизонта.

Традиционные инструменты планирования — диаграммы Ганта, метод критического пути, сетевое планирование [6], [7] — являются статическими и не описывают подобную динамику с обратной связью. Модели линейного программирования, применяемые для распределения ресурсов, также не учитывают накопительный характер долга и его влияние на будущую производительность. Системно-динамические модели проектов разработки программного обеспечения [8], [9] учитывают обратные связи, но используются, как правило, для имитации сценариев, а не для строгого синтеза оптимальной стратегии.

B. Цель и вклад работы

Целью работы является построение динамической модели распределения мощности команды в ИТ-проекте с учётом накопления технического долга, аналитический вывод оптимального закона управления, исследование равновесия и устойчивости модели и количественная оценка эффективности оптимальной стратегии. Работа основана на результатах научного исследования авторов и содержит следующие результаты.

Во-первых, предложена модель из двух связанных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой технический долг является самостоятельной фазовой переменной и связан с бэклогом контуром отрицательной обратной связи; для долга получено интегральное (вольтерровское) представление, позволяющее оценить долю исходного долга, сохраняющуюся к концу горизонта.

Во-вторых, из принципа максимума Понтрягина выведен замкнутый закон управления с учётом ограничений и терминального штрафа; показано, что он выражается через разность двух предельных эффектов, для которых сопряжённые переменные играют роль теневых цен (проверено численно через производные функционала по начальным условиям).

В-третьих, уточнён вопрос о достаточности условий оптимальности: знак второй производной гамильтониана по управлению гарантирует лишь единственность поточечного максимума, но не глобальную оптимальность; взамен предложен численный сертификат, основанный на многостартовом прямом методе и положительной определённости редуцированной матрицы Гессе.

В-четвёртых, для положения равновесия получены выражения в замкнутой форме, коридор значений управления, при которых равновесие существует, и критерий устойчивости; установлено, что номинальное управление из рассматриваемого примера лежит за границей коридора.

В-пятых, разработан и верифицирован двухэтапный численный алгоритм; показано, что простая прямо-обратная прогонка с постоянной релаксацией на данной задаче не сходится.

Статья организована следующим образом. В разделе II рассмотрена литература. В разделе III сформулирована математическая модель. Раздел IV посвящён выводу оптимального закона управления, раздел V — равновесию и устойчивости. Численный алгоритм и его верификация описаны в разделе VI, результаты расчётов — в разделе VII. В разделе VIII обсуждаются выводы и ограничения, раздел IX содержит заключение.

C. Область применимости и допущения

Модель детерминирована: интенсивности поступления задач и производительности заданы функциями времени, случайные факторы не рассматриваются. Команда считается однородной, а влияние долга на производительность — линейным по индексу долга. Единицы измерения времени, бэклога и индекса долга условны (время может измеряться, например, в спринтах), параметры модели не калибровались по данным конкретного проекта и служат для демонстрации свойств модели; практическое применение требует оценки параметров по истории проекта.

(cc) BY

II. Обзор литературы

A. Теория оптимального управления

Необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума установлены в монографии Л. С. Понтрягина и соавторов [10]. Метод динамического программирования, дающий альтернативный подход к синтезу стратегий, разработан Р. Беллманом [11]. Существование оптимальных управлений, условия регулярности и достаточные условия систематически изложены в работах [12], [13]; теорема существования Филиппова–Чезари, используемая в разделе IV, приведена в монографии [14]. Достаточность условий принципа максимума при выпуклости гамильтониана установлена в работах [15], [16].

B. Оптимальное управление в экономике и управлении

Приложения оптимального управления к задачам управления производством, накопления и износа фондов, технического обслуживания и замены оборудования рассмотрены в монографии [17]; нелинейные модели с несколькими равновесиями, бифуркациями и ограничениями на управление разобраны в монографии [18]. Методологически близки постановки теории надёжности [19], в которых рассматриваются деградация и обслуживание ресурса. Практические схемы численного решения (прямо-обратная прогонка) изложены в книге [20]. Свойство магистрали (turnpike), описывающее близость оптимальной траектории к стационарному режиму на длинных горизонтах, исследовано в работе [21].

C. Технический долг

Понятие технического долга введено У. Каннингемом [1] и получило развитие в теоретической трактовке П. Кручтена и соавторов [2]. В работе [22] управление техническим долгом сформулировано как самостоятельная исследовательская задача, при этом подчёркнуто влияние долга на долгосрочную производительность команд; количественные динамические модели этого влияния остаются малоизученными. Систематическое картирование [4] охватывает определения, виды долга и методы управления, а обзор [5] посвящён финансовому аспекту. Результаты семинара Dagstuhl [23] зафиксировали основные направления исследований, а исследования Т. Бескер и соавторов — модель архитектурного долга [24] и оценку потерь производительности разработчиков [3]. Ни одна из перечисленных работ не ставит задачу оптимального во времени распределения мощности команды как задачу оптимального управления с обратной связью по долгу.

D. Динамические модели проектов и планирование

Динамика проектов разработки программного обеспечения исследовалась в рамках системной динамики [8], [9]. Классические подходы к управлению проектами систематизированы в руководстве [6] и монографии [7]; они опираются на детерминированные статические инструменты. Теоретические основы очередей и расписаний содержатся в работах [25], [26]. Насыщающаяся зависимость скорости обслуживания от длины очереди, использованная в настоящей работе, по форме совпадает с функциональным откликом второго типа [27].

E. Нерешённая задача

Анализ показывает, что теория оптимального управления и феномен технического долга изучены по отдельности достаточно подробно, однако их совместное рассмотрение в рамках единой динамической модели распределения мощности команды с замкнутым выводом закона управления, анализом равновесия и верифицированным численным решением в доступной авторам литературе не найдено. Настоящая работа направлена на заполнение этого пробела.

III. Математическая модель

A. Фазовые переменные и управление

Рассмотрим команду из n специалистов, работающую над проектом на интервале планирования $t\in[0,T]$. Состояние описывается двумя переменными: $x_1(t)\geq 0$ — объём бэклога, то есть число невыполненных задач, и $x_2(t)\geq 0$ — безразмерный индекс технического долга. Управляющим воздействием служит $u(t)$ —

(cc) BY

доля мощности команды, направляемая на разработку нового функционала; доля $1-u(t)$ направляется на рефакторинг и погашение долга. Управление подчинено технологическому ограничению

$$u(t) \in U = [u_{min}, u_{max}], \quad 0 < u_{min} < u_{max} < 1. \tag{1}$$

Нижняя граница отражает обязательный минимум продуктовой работы, верхняя — невозможность полного отказа от поддержки кодовой базы; строгое неравенство $u_{max}<1$ существенно для ограниченности долга (см. раздел IV-A).

B. Функция обслуживания

Мощность команды ограничена сверху числом специалистов. Для описания этого свойства вводится насыщающаяся функция обслуживания

$$S(x_1) = n \cdot x_1 / (K + x_1), \tag{2}$$

где $K>0$ — константа полунасыщения. Функция (2) обладает свойствами $S(0)=0$ (при пустом бэклоге работа не выполняется), $S(x_1)\to n$ при $x_1\to\infty$ (производительность ограничена числом специалистов), $S'(x_1)=nK/(K+x_1)^2 \in (0, n/K]$ и $S''<0$. Ограниченность производной обеспечивает условие Липшица и тем самым существование и единственность решения задачи Коши, а гладкость — применимость принципа максимума, требующего дифференцируемости правой части по фазовым переменным.

C. Уравнения динамики

Фактическая производительность снижается по мере накопления долга; это описывается множителем $1-\sigma x_2$, где $\sigma>0$ — коэффициент влияния долга. Динамика системы задаётся уравнениями

$$dx_1/dt = \lambda(t) - \mu(t)\cdot u(t)\cdot S(x_1)\cdot(1 - \sigma x_2), \quad x_1(0) = x_{10}, \tag{3}$$

$$dx_2/dt = \theta\cdot u(t)\cdot S(x_1) - \rho\cdot(1 - u(t))\cdot x_2, \quad x_2(0) = x_{20}. \tag{4}$$

Здесь $\lambda(t)$ — интенсивность поступления задач, $\mu(t)$ — базовая производительность одного специалиста, $\theta>0$ — коэффициент накопления долга при интенсивной разработке, $\rho>0$ — коэффициент погашения долга при рефакторинге. Интенсивности периодически изменяются, что отражает спринтовую организацию работы:

$$\lambda(t) = \lambda_0[1 + \delta\cdot\sin(\pi t/\tau)], \quad \mu(t) = \mu_0[1 + \varepsilon\cdot\cos(\pi t/T_\mu)]. \tag{5}$$

Принципиальная особенность модели (3)–(4) — замкнутый контур отрицательной обратной связи (рис. 1). Увеличение u немедленно повышает скорость выполнения задач через множитель $\mu u S(x_1)$, но одновременно через уравнение (4) увеличивает x_2, который в свою очередь снижает эффективность в уравнении (3). Именно этот контур делает задачу нетривиальной.

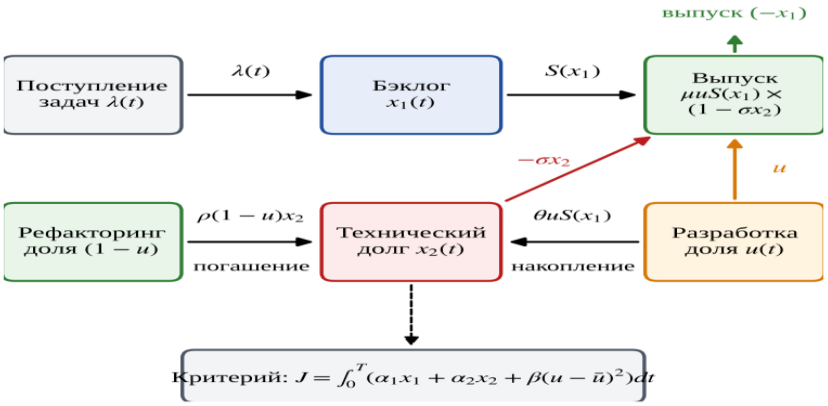


Рис. 1. Структурная схема модели: бэклог, технический долг и контур обратной связи «долг → эффективность → выпуск»

(cc) BY *dtai.uz*

Корректность модели. При $x_1=0$ имеем $dx_1/dt=\lambda>0$, а при $x_2=0$ имеем $dx_2/dt=\theta u S\geq 0$, поэтому неотрицательный ортант инвариантен. Из уравнения (4) следует оценка $dx_2/dt\leq \theta n u_{\max}-\rho(1-u_{\max})x_2$ и, значит, $x_2(t)\leq \max\{x_{20},\ \theta n u_{\max}/(\rho(1-u_{\max}))\}$; бэклог ограничен величиной $x_{10}+\int_0^T\lambda\ dt$. Эти априорные оценки (консервативные: для принятых параметров верхняя граница долга равна 46,4) используются в теореме существования. Содержательное требование $\sigma x_2<1$ (множитель эффективности положителен) выполняется на всех рассмотренных траекториях: минимальное значение $1-\sigma x_2$ равно 0,696 при оптимальном управлении, 0,695 при номинальном и 0,400 при агрессивном.

D. Критерий качества

Качество управления оценивается функционалом, объединяющим три составляющие издержек:

$$J[u] = \int_0^T [\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \beta(u(t)-\bar{u})^2]\ dt \to min, \qquad (6)$$

где $\alpha_1>0$ — удельные издержки задержки задач, $\alpha_2>0$ — удельные издержки технического долга, $\beta>0$ — штраф за отклонение распределения мощности от номинального уровня $\bar{u}$. Квадратичная форма последнего слагаемого моделирует организационные издержки перестройки работы команды и одновременно регуляризует задачу (обеспечивает строгую вогнутость гамильтониана по управлению). Для устранения краевого эффекта конечного горизонта рассматривается также вариант с терминальным штрафом за остаточный долг:

$$J_\kappa[u] = J[u] + \kappa\cdot x_2(T),\ \ \kappa\geq 0. \qquad (7)$$

E. Интегральное представление долга

Уравнение (4) линейно по x_2 при заданных u и x_1, поэтому методом вариации постоянной получаем явное (вольтерровское) представление

$$x_2(t) = x_{20}\cdot e^{-R(t)} + \int_0^t \theta\cdot u(s)\cdot S(x_1(s))\cdot e^{-[R(t)-R(s)]}\ ds, \qquad (8)$$

$$R(t) = \rho\int_0^t (1-u(\tau))\ d\tau.$$

Здесь $R(t)$ — накопленная интенсивность рефакторинга. Первое слагаемое — доля исходного долга, ещё не погашенная к моменту t; подынтегральное выражение — долг, возникший в момент s и «дисконтированный» рефакторингом. Из (8) следует, что скорость погашения исходного долга определяется только величиной $\rho(1-u)$: период полураспада равен $\ln 2/(\rho(1-u))$, то есть 6,16 при номинальном управлении $u=\bar{u}$ и 30,8 при $u=u_{\max}$ (последнее превышает горизонт $T=12$ в 2,6 раза). Прямой подсчёт по (8) на найденном решении совпадает с численным решением системы с максимальным расхождением $5{,}7\cdot 10^{-8}$ (относительным — $2{,}9\cdot 10^{-8}$).

F. Параметры численных экспериментов

Все расчёты выполнены для набора параметров, приведённого в табл. I. Параметры периодических возмущений δ, τ, ε, T_μ подобраны так, что значения функционала при номинальном и при агрессивном управлении на сетке $\Delta t=0{,}05$ равны 27,615 и 30,865; остальные параметры заданы исходной постановкой задачи.

Таблица I.

Параметры модели

Параметр	Значение	Смысл
n	5	число специалистов
K	3,00	константа полунасыщения
λ_0	2,00	интенсивность поступления задач

(cc) BY

Параметр	Значение	Смысл
μ_0	1,50	производительность специалиста
δ; τ	0,30; 5,0	амплитуда и полупериод $\lambda(t)$
ε; T_μ	0,10; 8,0	амплитуда и полупериод $\mu(t)$
σ	0,10	влияние долга на производительность
θ	0,22	накопление долга
ρ	0,45	погашение долга
α_1	0,35	издержки бэклога
α_2	0,40	издержки технического долга
β	0,07	штраф перестройки
$\bar{u}$	0,75	номинальная доля разработки
U	[0,20; 0,95]	допустимый диапазон управления
T; Δt	12,0; 0,050	горизонт и шаг сетки
$x_1(0)$; $x_2(0)$	8,00; 0,60	начальные условия

IV. Оптимальное управление: принцип максимума

A. Существование оптимального управления

Допустимыми считаются измеримые функции $u:[0,T]\to U$. Система (3)–(4) аффинна по управлению, множество U компактно и выпукло, подынтегральная функция критерия (6) выпукла по u (строго, при $\beta>0$), правые части непрерывны и локально липшицевы по фазовым переменным, а допустимые траектории равномерно ограничены оценками раздела III-C. В этих условиях расширенное множество скоростей выпукло, и теорема Филиппова–Чезари [12], [14] гарантирует существование оптимального управления. Существенно, что $u_{\max}<1$: иначе при $u\equiv 1$ долг не погашался бы вовсе и априорная оценка x_2 терялась.

B. Гамильтониан и сопряжённая система

Введём сопряжённые переменные $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ и составим гамильтониан в форме, соответствующей максимизации:

$$\begin{aligned} H = {} & -[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta(u-\bar{u})^2] + \\ & + \psi_1[\lambda - \mu u S(x_1)(1-\sigma x_2)] + \\ & + \psi_2[\theta u S(x_1) - \rho(1-u)x_2]. \end{aligned} \tag{9}$$

Сопряжённая система $d\psi_i/dt=-\partial H/\partial x_i$ с условиями трансверсальности $\psi(T)=-\partial\Phi/\partial x$, где $\Phi=\kappa x_2(T)$, принимает вид

$$\begin{aligned} & d\psi_1/dt = \alpha_1 + \psi_1\mu u S'(x_1)(1-\sigma x_2) - \\ & \quad - \psi_2\theta u S'(x_1),\ \ \psi_1(T)=0, \\ & d\psi_2/dt = \alpha_2 - \psi_1\mu u S(x_1)\sigma + \\ & \quad + \psi_2\rho(1-u),\ \ \psi_2(T) = -\kappa. \end{aligned} \tag{10}$$

Поскольку правый конец траектории свободен, анормальный случай (нулевой множитель при функционале) исключён, и множитель при критерии можно положить равным единице. При принятом знаке гамильтониана $\psi_i=-\partial J^*/\partial x_i$, то есть сопряжённые переменные отрицательны и по модулю равны предельной стоимости единицы соответствующего состояния.

(cc) BY

C. Условие максимума и закон управления

Производная гамильтониана по управлению равна

$$\partial H/\partial u = -2\beta(u - \bar{u}) - \\ - \psi_1\mu S(x_1)(1 - \sigma x_2) + \\ + \psi_2[\theta S(x_1) + \rho x_2]. \qquad (11)$$

Введём две неотрицательные величины: $B(t)=-\psi_1\mu S(x_1)(1-\sigma x_2)$ — предельную выгоду от ускорения разработки (экономию издержек бэклога при увеличении u на единицу) и $C(t)=-\psi_2[\theta S(x_1)+\rho x_2]$ — предельные издержки накопления долга и сокращения рефакторинга. Тогда $\partial H/\partial u=-2\beta(u-\bar{u})+B-C$, и максимум гамильтониана по $u\in U$ достигается в точке

$$u^*(t) = proj_U\{\bar{u} + \\ + [B(t) - C(t)]/(2\beta)\}, \\ B = -\psi_1\mu S(x_1)(1 - \sigma x_2), \qquad (12) \\ C = -\psi_2[\theta S(x_1) + \rho x_2].$$

Формула (12) совпадает с законом управления в виде $\bar{u}+[\psi_2(\theta S+\rho x_2)-\psi_1\mu S(1-\sigma x_2)]/(2\beta)$, спроектированным на U. Она допускает прямую содержательную интерпретацию: оптимальное управление равно номинальному уровню, скорректированному на разность двух предельных эффектов, делённую на удвоенную стоимость перестройки 2β. Три свойства закона важны для практики. Во-первых, поскольку $\partial^2 H/\partial u^2=-2\beta<0$, максимум по u при каждом t единствен. Во-вторых, u^* — композиция непрерывной проекции и непрерывных функций времени и состояния, поэтому оптимальное управление непрерывно: переключения типа «релейного» режима отсутствуют, а участки насыщения $u^*=u_{\max}$ и $u^*=u_{\min}$ примыкают к внутренним участкам непрерывно. При $\beta\to 0$ закон вырождается в релейный с функцией переключения $B-C$. В-третьих, усиление $1/(2\beta)$ велико (для $\beta=0{,}07$ оно равно 7,14), поэтому малая разность $B-C$ вызывает заметное изменение управления; именно это делает закон чувствительным к точности решения сопряжённой системы.

В табл. II приведены вдоль оптимальной траектории значения B, C, неограниченное стационарное управление $\bar{u}+(B-C)/(2\beta)$, фактическое управление u^* и отношение теневых цен. На интервале [0;2] неограниченное решение превышает $u_{\max}$ (управление насыщено), на интервале [4;11] величины B и C почти уравновешены (их разность не превышает 0,03), а при $t=T$ обе величины обращаются в нуль в силу условий трансверсальности, и $u^*(T)=\bar{u}$.

Таблица II.

Баланс предельных эффектов вдоль оптимальной траектории

t	B	C	$\bar{u}+(B-C)/2\beta$	u^*	ψ_2/ψ_1
0	10,452	6,948	25,785	0,950	3,50
2	6,236	6,171	1,214	0,950	2,48
4	5,180	5,186	0,708	0,708	1,97
6	3,892	3,907	0,642	0,642	1,71
8	2,642	2,664	0,594	0,594	1,68
10	1,485	1,485	0,753	0,753	1,68
11	0,804	0,778	0,939	0,939	1,49
12	−0,000	−0,000	0,750	0,750	—

(cc) BY

D. Теневые цены и их проверка

Из теоремы об огибающей следует $\partial J^*/\partial x_{i0} = -\psi_i(0)$. Для проверки найденное решение сравнивалось с центральными конечными разностями функционала по начальным условиям (краевая задача решалась заново при возмущённых x_{10} и x_{20}): $-\psi_1(0) = 1{,}85326$, $-\psi_2(0) = 6{,}49300$, разности дают 1,85326 и 6,49300; расхождение не превышает $4\cdot10^{-6}$. Таким образом, дополнительная единица исходного технического долга обходится в 3,50 раза дороже дополнительной единицы бэклога; отношение ψ_2/ψ_1 убывает вдоль траектории от 3,50 при $t=0$ до 1,49 при $t=11$, то есть по мере приближения к концу горизонта долг дорожает слабее.

E. О достаточности условий оптимальности

Часто делается вывод: из $\partial^2 H/\partial u^2 = -2\beta < 0$ и компактности U следует, что принцип максимума даёт глобальный минимум. Такой вывод неверен. Условие $\partial^2 H/\partial u^2 < 0$ обеспечивает только единственность поточечного максимума гамильтониана по u. Достаточность по Мангасарьяну [15] требует вогнутости гамильтониана по паре (x,u) при фиксированных ψ, а условие Эрроу — вогнутости максимизированного гамильтониана по x [16]. В нашей задаче гамильтониан билинеен: члены $\psi_1 \mu u S(1-\sigma x_2)$ и $\psi_2 \rho (1-u) x_2$ содержат произведения $u x_2$ и $u S(x_1)$, поэтому матрица Гессе по (x_1, x_2, u) неопределена. Её собственные значения на найденном решении приведены в табл. III: при каждом из рассмотренных t они имеют разные знаки, и тест Мангасарьяна не выполняется.

Таблица III.

Собственные значения матрицы Гессе гамильтониана по (x_1, x_2, u)

t	λ_1	λ_2	λ_3	знаки
2,5	−2,557	−0,113	2,436	−, −, +
6,0	−1,639	−0,071	1,512	−, −, +
9,0	−0,957	−0,053	0,827	−, −, +

Поэтому в работе принято следующее. Существование оптимального управления доказано (раздел IV-A); принцип максимума выделяет кандидата на оптимум; оптимальность кандидата подтверждается численным сертификатом. Прямой метод (кусочно-линейное управление в 49 узлах, L-BFGS-B [28], [29], схема Эйлера с шагом 0,0125) запускался из пяти существенно различных начальных управлений ($u \equiv 0{,}20$; 0,50; 0,75; 0,95 и случайного): все пять запусков за 76–83 итерации сходятся к одному значению функционала 26,4905, совпадающему со значением на управлении, найденном из принципа максимума, с точностью до $4\cdot10^{-5}$ (разность объясняется конечномерной параметризацией). Среднеквадратичное расхождение управлений равно 0,008, максимальное — 0,059 (достигается вблизи точек излома). Редуцированная матрица Гессе по 36 свободным (не лежащим на границе) узлам положительно определена: наименьшее собственное значение 0,0089, наибольшее 3,657, число обусловленности 411 . Это сертификат строгого локального минимума и независимости от начального приближения, а не доказательство глобальной оптимальности; различие подчёркивается намеренно.

F. Терминальный штраф

При $\kappa > 0$ условие трансверсальности $\psi_2(T) = -\kappa$ меняет закон управления на правом конце: из (12) следует

$$u^*(T) = \mathrm{proj}_U\{\bar{u} - \kappa[\theta S(x_1(T)) + \rho x_2(T)]/(2\beta)\}. \qquad (13)$$

Например, при $\kappa = 0{,}01$ и найденных $x_1(T) = 3{,}154$, $x_2(T) = 2{,}953$ формула даёт $u^*(T) = 0{,}6148$, что совпадает с численным результатом. Таким образом, терминальный

(cc) BY

штраф устраняет искусственное повышение u в конце горизонта, которое при $\kappa=0$ вызвано лишь тем, что последствия накопления долга после момента T в критерий не входят (раздел VII-F).

V. Равновесие и устойчивость

A. Равновесие в замкнутой форме

Исследуем поведение системы при постоянных параметрах ($\lambda\equiv\lambda_0$, $\mu\equiv\mu_0$) и фиксированном управлении u. Условия равновесия $dx_1/dt=dx_2/dt=0$ дают

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \mu_0 \cdot u \cdot S(x_1^*) \cdot (1 - \sigma x_2^*), \\ \theta \cdot u \cdot S(x_1^*) &= \rho(1 - u) \cdot x_2^*. \end{aligned} \tag{14}$$

Обозначим $s=S(x_1^*)$ и $c=\theta u/(\rho(1-u))$. Из второго уравнения $x_2^*=cs$, а подстановка в первое приводит к квадратному уравнению относительно s, которое решается в замкнутой форме:

$$\begin{aligned} &\sigma c \cdot s^2 - s + \lambda_0/(\mu_0 u) = 0, \\ &s = [1 \mp \sqrt{D}]/(2\sigma c), \\ &D = (u_{hi} - u)/(1 - u), \\ &u_{hi} = 1 - 4\sigma\theta\lambda_0/(\mu_0\rho). \end{aligned} \tag{15}$$

Формулы (15) дают равновесие явно (вместо численного решения трансцендентного уравнения) и позволяют сделать три вывода. Во-первых, равновесие существует, только если $D\geq 0$, то есть $u\leq u_{\text{hi}}$: для принятых параметров $u_{\text{hi}}=0{,}7393$. Содержательно, максимум пропускной способности $\max_s \mu_0 u s(1-\sigma c s)=\mu_0 u/(4\sigma c)$ при $u>u_{\text{hi}}$ оказывается меньше притока λ_0: накопление долга съедает производительность быстрее, чем команда её наращивает, и бэклог растёт неограниченно (ловушка технического долга). Во-вторых, равновесие с $s_-<n$ имеется лишь при $u>u_{\text{lo}}$, где $u_{\text{lo}}=0{,}2975$ — корень уравнения $\lambda_0=\mu_0 u n(1-\sigma c n)$; при $u<u_{\text{lo}}$ мощности недостаточно даже при полном насыщении. Итак, равновесие существует в коридоре $u\in[0{,}2975;\ 0{,}7393]$. В-третьих, эффективность команды в равновесии выражается через единственный параметр D:

$$1 - \sigma x_2^* = (1 + \sqrt{D})/2. \tag{16}$$

Для $u=0{,}65$ получаем $D=0{,}2550$, $x_1^*=3{,}5962$, $x_2^*=2{,}4750$, $1-\sigma x_2^*=0{,}7525$: в равновесии команда работает с эффективностью 75,25 % от номинальной, а накопленный долг «съедает» 24,75 % производительности. Это количественная оценка долгосрочной цены технического долга.

B. Устойчивость

Линеаризуем систему (3)–(4) в окрестности равновесия. Матрица Якоби имеет вид

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \\ a_{11} &= -\mu_0 u S'(x_1^*)(1 - \sigma x_2^*), \\ a_{12} &= \mu_0 u S(x_1^*)\sigma, \\ a_{21} &= \theta u S'(x_1^*), \quad a_{22} = -\rho(1 - u). \end{aligned} \tag{17}$$

Использование второго уравнения (14) в виде $\rho(1-u)\sigma x_2^*=\sigma\theta u S(x_1^*)$ даёт след и определитель

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A &= -\mu_0 u S'(x_1^*)(1 - \sigma x_2^*) - \\ &\quad - \rho(1 - u), \\ \det A &= \mu_0 u S'(x_1^*) \cdot \rho(1 - u) \cdot \\ &\quad \cdot (1 - 2\sigma x_2^*). \end{aligned} \tag{18}$$

Если $\sigma x_2^*<1$, то $\operatorname{tr} A<0$, а знак $\det A$ совпадает со знаком $1-2\sigma x_2^*$. Следовательно, равновесие асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда $\sigma x_2^*<1/2$ [30]. Для ветви s_- из (15) имеем $\sigma x_2^*=\sigma c s_-=(1-\sqrt{D})/2<1/2$, то есть эта ветвь устойчива при всех u из коридора; ветвь s_+ при $\sigma x_2^*>1/2$ является седлом, и в точке $u=u_{\text{hi}}$ ($D=0$) они сливаются (седло-узловая бифуркация). Тем самым устойчивость доказана для всего коридора, а не только вычислена в одной точке.

(cc) BY

Для u=0,65: tr A=−0,4104, det A=0,02674, дискриминант $\mathrm{tr}^2A-4\det A$=0,0615>0, собственные значения ϱ_1=−0,3292 и ϱ_2=−0,0812 действительны и отрицательны: равновесие — устойчивый узел, траектории приближаются к нему монотонно. Отношение $|\varrho_1/\varrho_2|$=4,05 показывает два временных масштаба: быстрый ($1/|\varrho_1|$=3,04), связанный с сокращением бэклога, и медленный ($1/|\varrho_2|$=12,31), отвечающий за погашение долга. Медленная постоянная времени сравнима с горизонтом T=12, поэтому за горизонт планирования система не успевает выйти на равновесие (рис. 2).

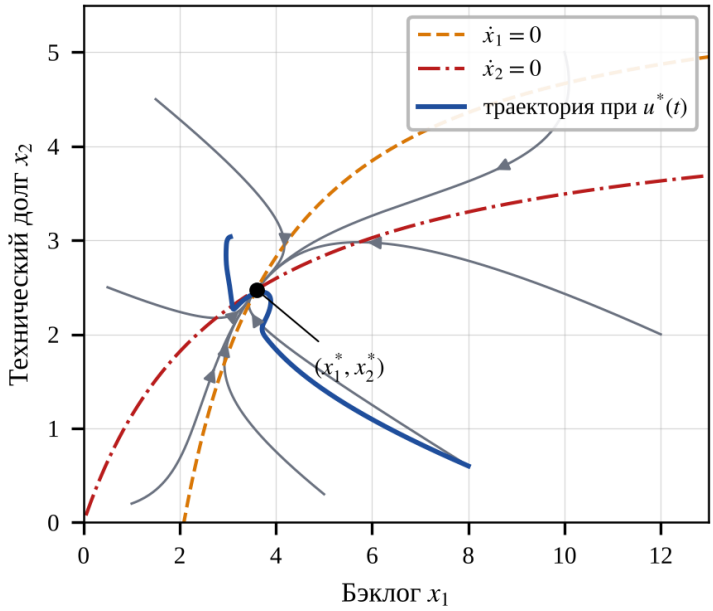


Рис. 2. Фазовый портрет при u=0,65: нуль-изоклины, траектории, равновесие и траектория при оптимальном управлении $u^*(t)$

C. Семейство равновесий и стационарный оптимум

В табл. IV приведены равновесия при разных u (все собственные значения действительны и отрицательны, что согласуется с доказанным), на рис. 3 — зависимость равновесных значений и удельных издержек $L(u)=\alpha_1 x_1^*(u)+\alpha_2 x_2^*(u)+\beta(u-\bar{u})^2$ от u. Функция L имеет единственный минимум при u_{ss}=0,5941 со значениями x_1^*=3,845, x_2^*=2,010 и L=2,152. Минимальное значение оптимального управления на горизонте, 0,5926 при t=7,77, близко к u_{ss}; это согласуется со свойством магистрали [21], однако горизонт T=12 сопоставим с медленной постоянной времени (12,3), поэтому строгий вывод о магистрали не делается, и наблюдение носит качественный характер.

Таблица IV.

Равновесия при различных значениях управления

u	x_1^*	x_2^*	$1-\sigma x_2^*$	ϱ_1	ϱ_2	L
0,35	18,282	1,131	0,887	−0,295	−0,013	6,862
0,45	6,584	1,374	0,863	−0,269	−0,074	2,860
0,55	4,286	1,757	0,824	−0,289	−0,106	2,206
0,60	3,803	2,050	0,795	−0,313	−0,099	2,153
0,65	3,596	2,475	0,753	−0,329	−0,081	2,249
0,70	3,810	3,191	0,681	−0,313	−0,053	2,610

(cc) BY

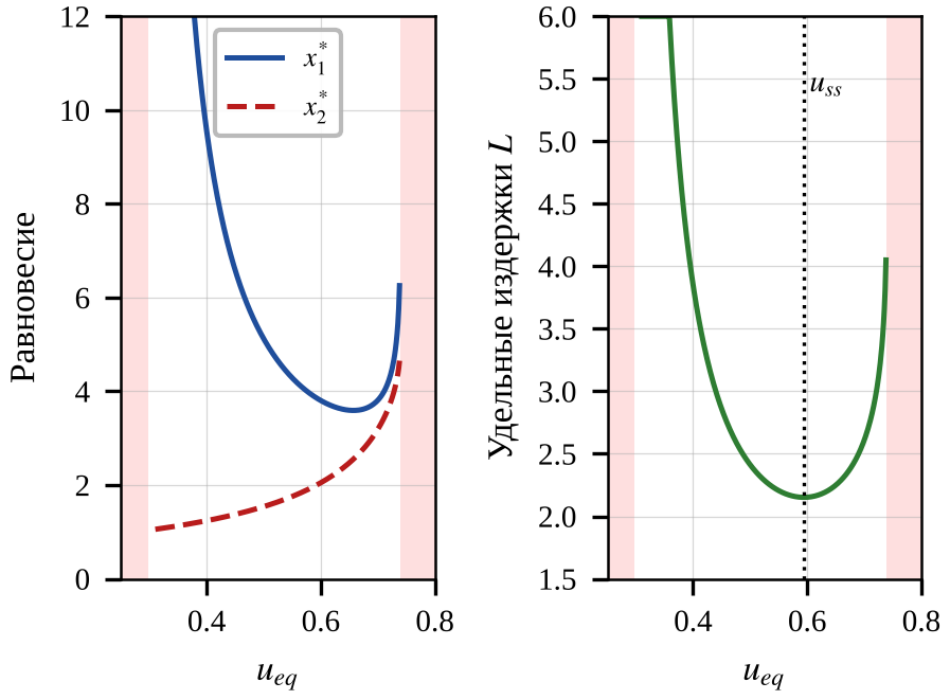


Рис. 3. Равновесные значения x_1^*, x_2^* (слева) и удельные издержки L (справа) в зависимости от u; закрашены значения и вне коридора существования

D. Номинальное управление вне коридора

Номинальный уровень $\bar{u}=0{,}75$ превышает $u_{\text{hi}}=0{,}7393$, то есть лежит за границей коридора. Это означает, что при постоянстве параметров бэклог при $u\equiv\bar{u}$ не имеет предела. Расчёт на расширенном горизонте подтверждает это: при $u\equiv\bar{u}$ бэклог равен 3,70 при $t=50$, 5,73 при $t=100$ и 14,41 при $t=200$ (долг 6,04 при $t=200$), тогда как при $u\equiv 0{,}65$ решение остаётся ограниченным ($x_1(200)=3{,}03$, $x_2(200)=2{,}41$). На горизонте $T=12$ дрейф ещё мал, но именно он объясняет, почему номинальная стратегия проигрывает оптимальной по обеим составляющим издержек (раздел VII).

VI. Численный метод и его верификация

A. Дискретизация и точный дискретный сопряжённый градиент

Время разбивается на $N=T/h$ шагов, состояние интегрируется явным методом Эйлера [31], функционал заменяется квадратурной суммой $\hat{J}(u)=h\sum_k L_k+\kappa x_{2,N}$. Градиент дискретного функционала вычисляется точно с помощью дискретной сопряжённой системы, а не как разностная аппроксимация непрерывной сопряжённой системы (10) [32]:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h\cdot f(t_k, x_k, u_k), \\ k &= 0, \ldots, N-1, \\ \psi_k &= \psi_{k+1} + \\ &+ h\cdot \partial_{xH}(t_k, x_k, u_k, \psi_{k+1}), \\ \psi_N &= (0, -\kappa), \\ \partial\hat{J}/\partial u_k &= \\ &= -h\cdot \partial_{uH}(t_k, x_k, u_k, \psi_{k+1}). \end{aligned} \tag{19}$$

Последнее равенство вместе со строгой вогнутостью H по u показывает, что направление $d_k=\text{proj}_U\{\bar{u}+(B_k-C_k)/(2\beta)\}-u_k$ является направлением спуска для $\hat{J}$ (скалярное произведение с градиентом равно $-2\beta h\, d_k^2\le 0$ на внутренних узлах), что и обеспечивает монотонность следующего алгоритма.

B. Двухэтапный алгоритм

Этап 1 — монотонный проективный градиентный метод с шагом по правилу Армийо: $u^{k+1}=u^k+\alpha_k d^k$, где $\alpha_k=2^{-j}$ — наибольший шаг, для

(cc) BY

которого $\hat{J}(u^k+\alpha_{kd}{}^k)<\hat{J}(u^k)$. Этап 2 — решение двухточечной краевой задачи для вектора (x_1,x_2,ψ_1,ψ_2) с граничными условиями $x(0)=x_0$, $\psi(T)=(0,-\kappa)$, в которой управление исключено по формуле (12); используется коллокационный метод с контролем невязки [33] (реализация [34]) и начальным приближением из этапа 1; при неудаче сетка сгущается. Правая часть краевой задачи липшицева, так как проекция на отрезок липшицева. Блок-схема приведена на рис. 4, формальное описание — в алгоритме 1.

Алгоритм 1.

Двухэтапное решение задачи оптимального управления

1: **Вход:** параметры модели, T, h, допуск $\varepsilon=10^{-3}$; $u^0\equiv\bar{u}$; $k:=0$.
2: **Этап 1. повторять** (не более 60 итераций)
3: решить прямую систему методом Эйлера;
4: решить дискретную сопряжённую систему в обратном времени, $\psi_N=(0,-\kappa)$;
5: вычислить $d^k=\mathrm{proj}_U\{\bar{u}+(B-C)/(2\beta)\}-u^k$;
если $\|d^k\|_\infty<\varepsilon$ — **выйти**;
6: найти $\alpha_k=2^{-j}$ из условия Армийо $\hat{J}(u^k+\alpha_{kd}{}^k)<\hat{J}(u^k)$;
7: $u^{k+1}:=u^k+\alpha_{kd}{}^k$; $k:=k+1$.
8: **Этап 2.** решить краевую задачу (10) с u^* из (12) коллокацией (допуск 10^{-7}), начальное приближение — из этапа 1;
9: если сходимость не достигнута — сгустить сетку.
10: **Выход:** u^*, x^*, ψ^*, J^*.

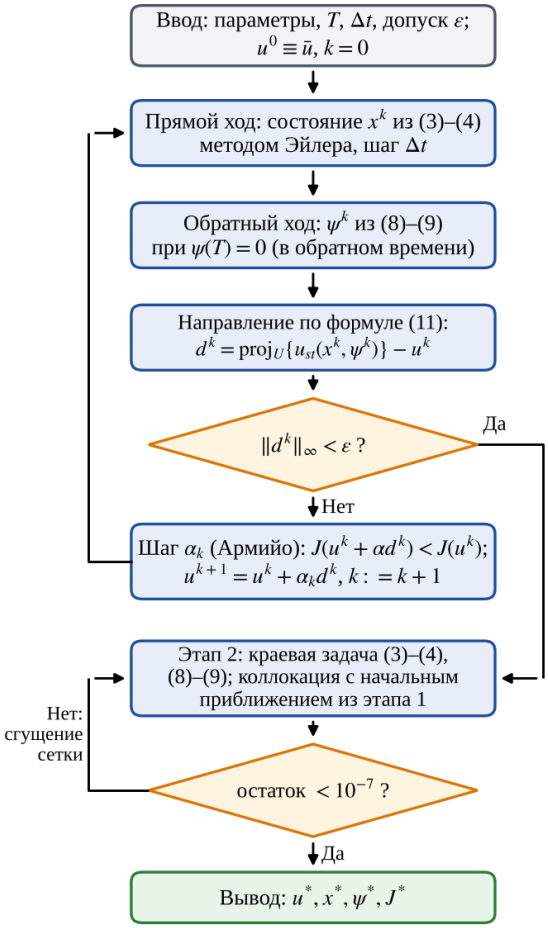


Рис. 4. Блок-схема двухэтапного алгоритма

C. Почему простая релаксация не сходится

Широко используется схема прямо-обратной прогонки с постоянной релаксацией $u^{k+1}=(1-\omega)u^k+\omega\, u_{st}(x^k,\psi^k)$ [20], где u_{st} — правая часть (12). На данной задаче она не сходится. При $\omega\in\{0{,}5;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}05\}$ после 1000 итераций расстояние $\|u_{st}-u^k\|_\infty$ не опускается ниже 0,22 (минимум по итерациям; значения на последней итерации — 0,50, 0,41, 0,56, 0,53), а функционал колеблется в пределах 26,46–26,64, то есть найденные таким способом «оптимумы» зависят от номера итерации (рис. 5). Вероятная причина — большое усиление $1/(2\beta)=7{,}14$ в формуле (12): малые изменения x и ψ вызывают крупное изменение u_{st}, и неподвижная итерация становится колебательной. Монотонный шаг Армийо устраняет колебания: за 60 итераций функционал дискретной задачи убывает от 27,615 (при $u\equiv\bar{u}$) до 26,449, то есть до оптимума дискретной задачи на сетке $h=0{,}05$.

(cc) BY

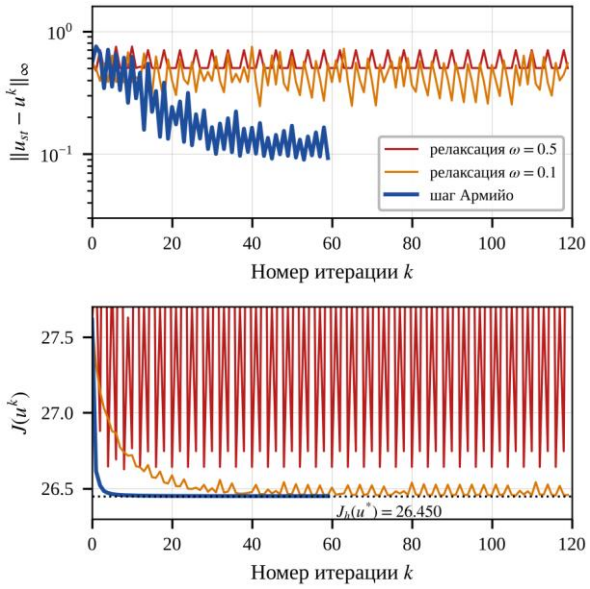


Рис. 5. Сходимость итераций: расстояние $\|u_{st}-u^k\|_\infty$ (вверху) и функционал $J(u^k)$ (внизу) для релаксационной прогонки и шага Армийо

D. Верификация

Порядок схемы. Ошибка явного метода Эйлера оценивалась относительно эталонного решения, полученного интегрированием с относительным допуском 10^{-12} при том же управлении $u^*(t)$. В табл. V приведена максимальная по обоим состояниям ошибка при пяти значениях шага; эмпирический порядок равен 1,04, 0,98, 1,01 и 1,00, что соответствует теоретическому порядку $O(h)$ явного метода Эйлера [31], [35] и подтверждает корректность реализации (рис. 6). Значение функционала на сетке h=0,05 при управлении u^* равно 26,450 и отличается от J^*=26,504 на 0,054; на сетке h=0,0125 отличие равно 0,0136, то есть убывает в четыре раза при уменьшении шага в четыре раза, как и должно быть для схемы первого порядка.

Таблица V.

Сходимость схемы Эйлера

Шаг h	Максимальная ошибка	Порядок
0,400	$4{,}648\cdot10^{-1}$	—
0,200	$2{,}256\cdot10^{-1}$	1,04
0,100	$1{,}145\cdot10^{-1}$	0,98
0,050	$5{,}700\cdot10^{-2}$	1,01
0,025	$2{,}856\cdot10^{-2}$	1,00

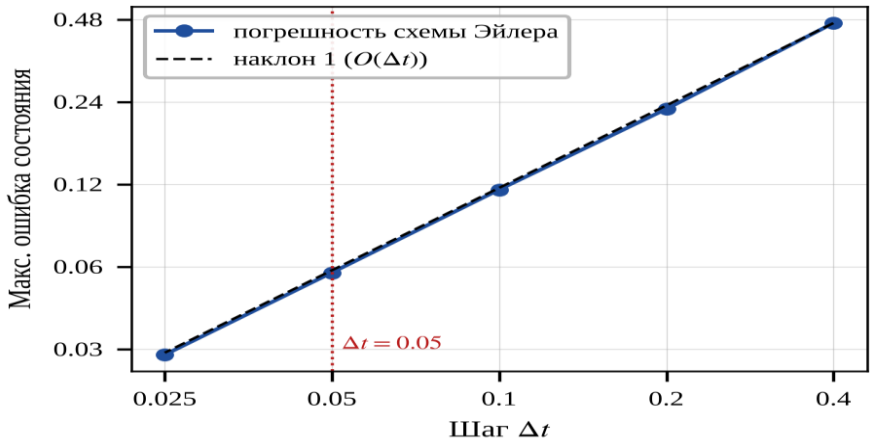


Рис. 6. Ошибка схемы Эйлера в логарифмических осях; штриховая линия — наклон 1

Краевая задача. Значение J^* практически не зависит от допуска коллокации (табл. VI): при допусках 10^{-3}, 10^{-5} и 10^{-7} оно совпадает до шестого знака, число узлов растёт от 246 до 467. Допуск 10^{-9} не достигается (решатель исчерпывает лимит узлов), поэтому в дальнейшем используется решение с допуском 10^{-7}.

(cc) BY

Таблица VI.

Контроль решения краевой задачи

Допуск	Узлов	J^*	Макс. невязка
$1\cdot10^{-2}$	241	26,504186	$5{,}7\cdot10^{-3}$
$1\cdot10^{-3}$	246	26,504076	$7{,}5\cdot10^{-4}$
$1\cdot10^{-5}$	280	26,504076	$1{,}0\cdot10^{-5}$
$1\cdot10^{-7}$	467	26,504076	$9{,}9\cdot10^{-8}$

VII. Результаты численных экспериментов

A. Постановка эксперимента

Сопоставлялись четыре стратегии: оптимальное управление $u^*(t)$; номинальное постоянное управление $\bar{u}$=0,75; агрессивная стратегия $u=u_{\max}$=0,95 (полный приоритет нового функционала) и наилучшее постоянное управление u=0,765 (найдено одномерным поиском). Выигрыш стратегии определяется как $G=(J_s-J^*)/J_s$. Значения функционала вычислены интегрированием с контролем погрешности, поэтому они отличаются от значений на сетке Эйлера h=0,05 (для оптимального, номинального и агрессивного управления на этой сетке — 26,450, 27,615 и 30,865; выигрыши на ней — 4,22 % и 14,30 %, то есть близки к приведённым ниже).

B. Структура оптимального управления

Оптимальное управление (табл. VII, рис. 7) имеет трёхфазную структуру. Фаза I: при большом начальном бэклоге управление насыщено, $u^*=u_{\max}$, на интервале $t\in[0;2{,}13]$: приоритетом является быстрое сокращение очереди. Фаза II: управление снижается и на интервале $t\in[5{,}81;9{,}14]$ остаётся не выше 0,65 — это «окно рефакторинга»; минимум u^*=0,593 достигается при t=7,77, то есть команда направляет на рефакторинг около 40,7 % мощности. Фаза III: управление вновь возрастает, достигает $u_{\max}$ при $t\approx11{,}06$ и удерживается до $t\approx11{,}71$, после чего в пограничном слое у правого конца падает до $\bar{u}$ (при κ=0 из $\psi(T)$=0 следует $u^*(T)=\bar{u}$). Среднее значение u^* за горизонт равно 0,7528, то есть практически совпадает с номинальным; выигрыш обеспечивается не уровнем, а перераспределением мощности во времени.

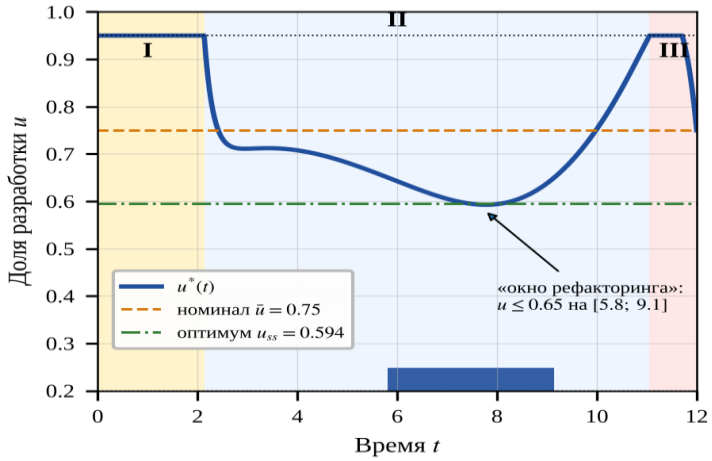


Рис. 7. Оптимальное управление $u^*(t)$: фазы I–III и «окно рефакторинга»

(cc) BY dtai.uz

Таблица VII.

Состояние, управление и сопряжённые переменные вдоль оптимальной траектории

t	x_1	x_2	u^*	ψ_1	ψ_2
0	8,000	0,600	0,950	−1,853	−6,493
1	5,340	1,293	0,950	−1,718	−5,273
2	3,918	1,885	0,950	−1,690	−4,194
3	3,779	2,155	0,711	−1,667	−3,590
4	3,885	2,304	0,708	−1,590	−3,129
5	3,861	2,413	0,682	−1,481	−2,680
6	3,697	2,449	0,642	−1,340	−2,286
7	3,455	2,409	0,605	−1,172	−1,950
8	3,242	2,324	0,594	−0,982	−1,647
9	3,127	2,268	0,638	−0,773	−1,323
10	3,084	2,334	0,753	−0,548	−0,924
11	3,001	2,626	0,939	−0,302	−0,449
12	3,053	3,037	0,750	0,000	0,000

C. Динамика бэклога и долга

Бэклог и долг при разных стратегиях показаны на рис. 8 и рис. 9. Агрессивная стратегия обеспечивает наименьший бэклог в середине горизонта (при t=8: 2,172 против 3,242 при оптимальном управлении), но платит за это монотонным ростом долга до 6,001 к моменту T, тогда как оптимальное управление удерживает долг на уровне 3,037 (в 1,98 раза ниже). Эффективность команды $1-\sigma x_2$ при агрессивной стратегии падает до 0,400, при оптимальной — не ниже 0,696. Накопленный долг затем сводит на нет начальный выигрыш в скорости: бэклог при агрессивном управлении становится больше, чем при оптимальном, начиная с $t\approx10{,}7$, и к концу горизонта составляет 4,109 против 3,053. Таким образом, игнорирование долга проигрышно даже с точки зрения цели, ради которой оно предпринимается, но проигрыш проявляется с запаздыванием — на горизонте порядка нескольких единиц времени он может быть незаметен. Оптимальная стратегия, напротив, сознательно допускает умеренно больший бэклог в середине горизонта (при t=8 3,242 против 2,717 у номинальной), чтобы к его концу получить меньшие значения обеих переменных (3,053 и 3,037 против 3,487 и 3,049 у номинальной).

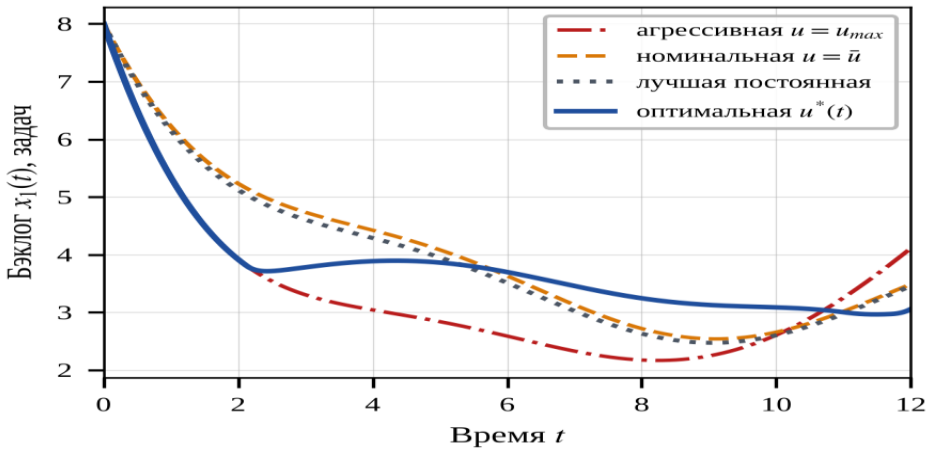


Рис. 8. Бэклог $x_1(t)$ при различных стратегиях управления

(cc) BY

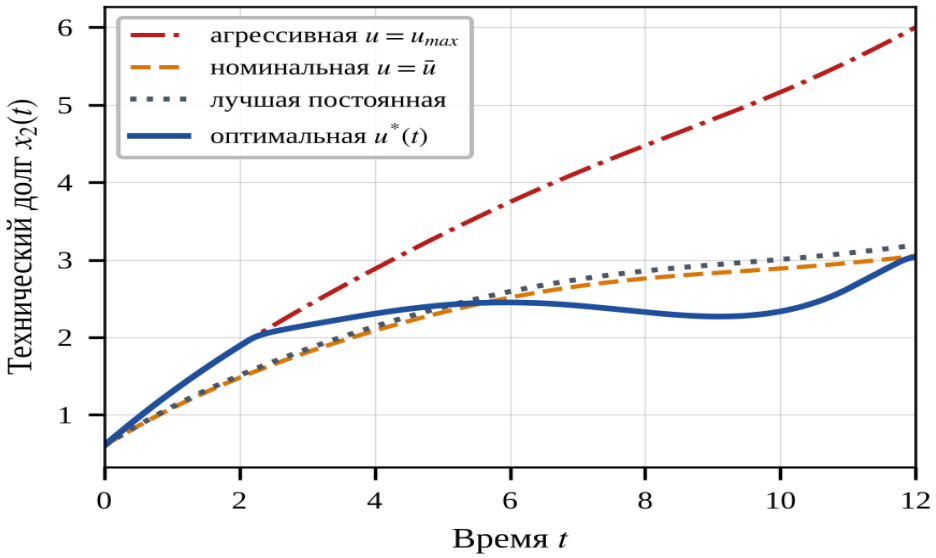


Рис. 9. Технический долг $x_2(t)$ при различных стратегиях управления

D. Сравнение интегральных издержек

Результаты сравнения приведены в табл. VIII. Оптимальное управление даёт наименьшее значение функционала J^*=26,504; выигрыш составляет 4,17 % по сравнению с номинальной, 14,48 % — по сравнению с агрессивной и 4,10 % — по сравнению с наилучшей постоянной стратегией. Последнее сравнение особенно показательно: выигрыш над лучшей постоянной стратегией достигается исключительно за счёт динамического характера управления, то есть правильного выбора моментов перераспределения мощности между разработкой и рефакторингом.

Таблица VIII.

Сравнение стратегий управления

Стратегия	***J***	$x_1(T)$	$x_2(T)$	**Выигрыш *G*, %**
Оптимальная $u^*(t)$	26,504	3,053	3,037	—
Лучшая постоянная u=0,765	27,636	3,455	3,189	4,10
Номинальная $u=\bar{u}$=0,75	27,657	3,487	3,049	4,17
Агрессивная u=0,95	30,993	4,109	6,001	14,48

Разложение функционала по составляющим (табл. IX) объясняет механизм выигрыша. Агрессивная стратегия снижает издержки бэклога до 13,763 (на 13,8 % ниже, чем при оптимальном управлении), но увеличивает издержки долга до 17,196 (на 63 % выше). Оптимальное управление уменьшает обе составляющие по сравнению с номинальной (издержки бэклога на 4,8 %, долга на 3,3 %), а затраты на перестройку ($\beta\int(u-\bar{u})^2dt$=0,015) составляют лишь 0,06 % от J^*.

Таблица IX.

Составляющие функционала

Стратегия	$\alpha_1\int x_1dt$	$\alpha_2\int x_2dt$	$\beta\int(u-\bar{u})^2dt$	***J***
Оптимальная	15,959	10,530	0,015	26,504
Постоянная 0,765	16,387	11,249	0,0002	27,636
Номинальная	16,764	10,893	0,000	27,657

(cc) BY

Стратегия	$\alpha_1\int x_1 dt$	$\alpha_2\int x_2 dt$	$\beta\int(u-\bar{u})^2 dt$	J
Агрессивная	13,763	17,196	0,034	30,993

Теневые цены вдоль оптимальной траектории показаны на рис. 10: $|\psi_2|$ всегда больше $|\psi_1|$, то есть единица долга дороже единицы бэклога, а обе величины убывают к нулю при $t \to T$ по мере сокращения оставшегося времени, в течение которого накопленное состояние порождает издержки. Именно монотонное убывание $|\psi_2|$ объясняет, почему в конце горизонта рефакторинг перестаёт окупаться.

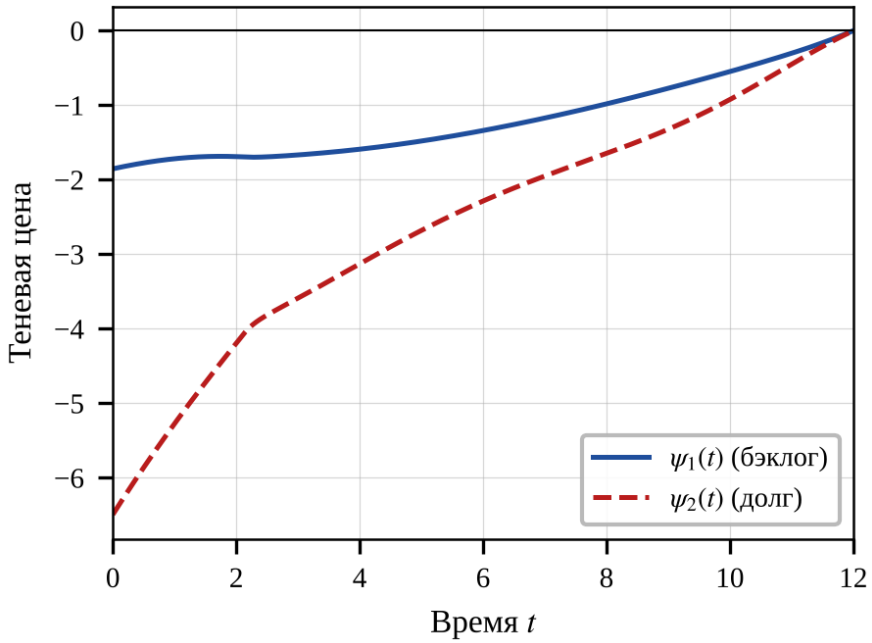


Рис. 10. Сопряжённые переменные $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ как теневые цены бэклога и долга

E. Чувствительность к параметрам

Для оценки робастности результатов выполнен анализ чувствительности по σ, θ и β. Результаты по σ приведены в табл. X и на рис. 11. Среднее значение u^* монотонно убывает с ростом σ (от 0,775 до 0,689): чем сильнее долг подавляет производительность, тем большую долю мощности следует направлять на рефакторинг. Выигрыш над агрессивной стратегией монотонно растёт (от 10,8 % до 29,4 %): игнорирование долга тем разрушительнее, чем сильнее его эффект. Выигрыш над номинальной стратегией составляет от 4,1 % до 5,3 % и немонотонен по σ (минимум при $\sigma \approx 0{,}10$–$0{,}13$, где среднее u^* ближе всего к номинальному уровню): таким образом, вывод о том, что выигрыш над номинальной стратегией возрастает с ростом σ, на полученных данных не подтверждается.

Таблица X.

Чувствительность к коэффициенту σ

σ	J^*	$J_{ном}$	$G_{ном}$, %	$G_{агр}$, %	ср. u^*
0,04	22,235	23,488	5,33	10,78	0,775
0,07	24,113	25,316	4,75	11,78	0,768
0,10	26,504	27,657	4,17	14,48	0,753
0,13	29,442	30,703	4,11	20,50	0,725
0,16	32,780	34,632	5,35	29,42	0,689

(cc) BY

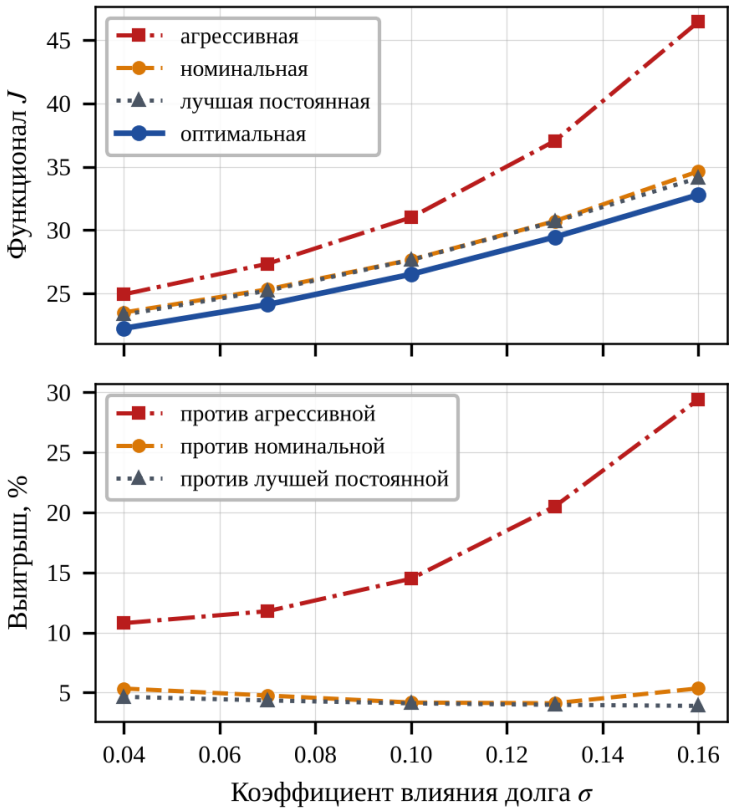


Рис. 11. Чувствительность к σ: функционал для четырёх стратегий (вверху) и выигрыш оптимального управления (внизу)

Результаты по θ (табл. XI): при малом θ накопление долга медленное, и агрессивная стратегия оказывается почти оптимальной (выигрыш 4,2 % при θ=0,10); с ростом θ выигрыш над ней увеличивается до 21,9 %, а среднее u^* снижается от 0,849 до 0,699.

Таблица XI.

Чувствительность к коэффициенту θ

θ	J^*	$J_{ном}$	$G_{ном}$, %	$G_{агр}$, %	ср. u^*
0,10	18,307	19,815	7,61	4,20	0,849
0,16	22,326	23,502	5,00	8,70	0,801
0,22	26,504	27,657	4,17	14,48	0,753
0,28	30,761	32,383	5,01	21,86	0,699

F. Терминальный штраф

Результаты для варианта (7) с терминальным штрафом приведены в табл. XII и на рис. 12. С ростом κ управление на правом конце снижается в соответствии с (13), и «завершающее ускорение» исчезает: уже при κ=0,05 долг в конце горизонта уменьшается с 3,037 до 2,627 (на 13,5 %), а текущая часть функционала J возрастает лишь на 0,04 % (с 26,504 до 26,514); платой служит рост бэклога в конце горизонта от 3,053 до 3,600. Так как значение κ — управленческий параметр (оценка стоимости передачи долга следующему этапу), модель позволяет явно выбирать компромисс между скоростью и качеством на границе горизонта.

(cc) BY

Таблица XII.

Влияние терминального штрафа к

κ	J	$J+\kappa x_2(T)$	$x_1(T)$	$x_2(T)$	$u^*(T)$
0,00	26,504	26,504	3,053	3,037	0,750
0,01	26,505	26,534	3,154	2,953	0,615
0,02	26,506	26,563	3,266	2,865	0,484
0,05	26,514	26,645	3,600	2,627	0,200
0,10	26,533	26,770	4,002	2,370	0,200
0,20	26,575	26,991	4,510	2,080	0,200

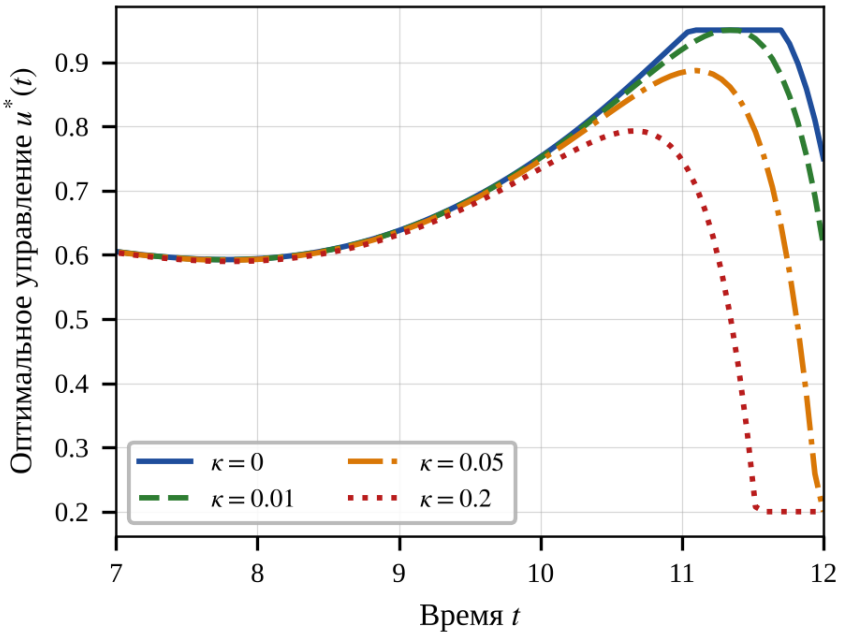


Рис. 12. Влияние терминального штрафа к на оптимальное управление вблизи правого конца горизонта

G. Сохранение исходного долга

На рис. 13 показана доля исходного долга, сохраняющаяся к моменту t, то есть $e^{-R(t)}$ из (8). К концу горизонта при оптимальном управлении сохраняется 26,3 % исходного долга, при номинальном — 25,9 %, при агрессивном — 76,3 %. Таким образом, агрессивная стратегия фактически «замораживает» исходный долг: полупериод его погашения равен 30,8, что в 2,6 раза больше горизонта. Из итогового долга оптимальной траектории $x_2(T)$=3,037 лишь 5,2 % (0,158 в абсолютных единицах) унаследовано от исходного долга, остальное создано самим проектом на горизонте, поэтому основным рычагом остаётся управление долгом, возникающим в ходе разработки.

(cc) BY

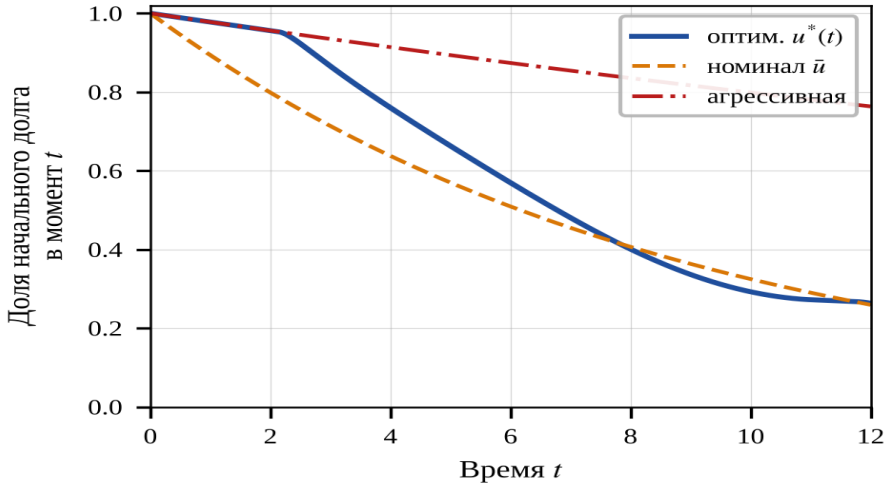


Рис. 13. Доля исходного технического долга, сохраняющаяся к моменту t

H. Влияние штрафа перестройки

Штраф β слабо влияет на значение функционала (в диапазоне $\beta \in [0{,}02;\ 0{,}28]$ величина J^* меняется лишь на 0,049, 0,19 %), но заметно меняет форму управления (табл. XIII, рис. 14): с ростом β минимум управления становится менее глубоким (от 0,589 до 0,606), а полная вариация $\sum|\Delta u|$ убывает от 0,937 до 0,727. Это согласуется с ролью β как регуляризатора: он сглаживает переключения, сохраняя трёхфазную структуру.

Таблица XIII.

Влияние штрафа перестройки β

β	J^*	$G_{ном}$, %	min u^*	$\sum\|\Delta u\|$	$x_2(T)$
0,020	26,493	4,21	0,589	0,937	3,083
0,035	26,497	4,20	0,590	0,929	3,069
0,070	26,504	4,17	0,593	0,917	3,037
0,140	26,518	4,12	0,597	0,849	2,969
0,280	26,542	4,03	0,606	0,727	2,897

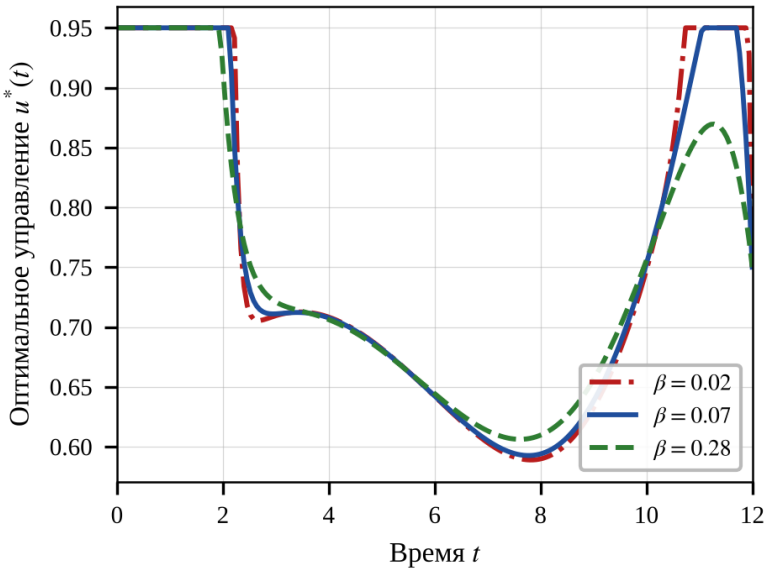


Рис. 14. Оптимальное управление при различных значениях штрафа перестройки β

(cc) BY

VIII. Обсуждение результатов

A. Интерпретация трёх фаз

Основным содержательным результатом является трёхфазная структура оптимальной стратегии; её управленческая интерпретация следует из баланса предельных эффектов (12). Фаза I — интенсивная разработка при насыщении управления. Она возникает при значительном начальном бэклоге, когда предельная выгода от ускорения B превышает предельную стоимость накопления долга C (при t=0: B=10,45 против C=6,95, табл. II). На этом этапе допустимо временно жертвовать техническим качеством ради скорости.

Фаза II — окно рефакторинга. По мере накопления долга множитель $1-\sigma x_2$ снижается, а вместе с ним и B, так что дальнейшее ускорение разработки становится контрпродуктивным: каждая новая задача выполняется медленнее предыдущей. Момент переключения не задаётся экспертно, а определяется автоматически из условия $B \approx C$ в формуле (12); на интервале [4;11] оба эффекта почти уравновешены.

Фаза III — завершающее ускорение. Оно объясняется условием трансверсальности: вблизи конца горизонта долгосрочные последствия накопления долга перестают учитываться в функционале. Это известное ограничение моделей с конечным горизонтом; в практических приложениях оно устраняется терминальным штрафом (раздел VII-F) или схемой скользящего горизонта.

B. Практическая значимость

Модель даёт количественный инструмент для обоснования решений о выделении времени на рефакторинг. Теневая цена $|\psi_2(t)|$ интерпретируется как текущая стоимость единицы технического долга, а отношение ψ_2/ψ_1 показывает, скольким задачам бэклога эквивалентна единица индекса долга: на рассмотренной траектории оно изменяется от 3,50 в начале до 1,49 в конце горизонта. Второй практический результат — граница u_{hi} коридора существования равновесия: выражение $u_{\text{hi}}=1-4\sigma\theta\lambda_0/(\mu_0\rho)$ содержит только параметры, оцениваемые по истории проекта, и указывает долю мощности, превышение которой делает устойчивый режим работы невозможным. В рассмотренном примере номинальный уровень $\bar{u}$=0,75 лежит за этой границей, что количественно объясняет проигрыш номинальной стратегии на длинных горизонтах.

C. Ограничения и угрозы валидности

Модель детерминирована, команда считается однородной, а деградация производительности — линейной по индексу долга и сохраняет положительный множитель эффективности лишь при $\sigma x_2<1$; при существенно большем долге форму зависимости необходимо пересматривать. Параметры модели не калибровались по данным реальных проектов, а параметры периодических возмущений выбраны так, чтобы воспроизвести опорные значения функционала; поэтому абсолютные значения издержек и границы окна рефакторинга иллюстративны, а устойчивыми следует считать качественные выводы (структура управления, роль теневых цен, коридор существования равновесия), подтверждённые анализом чувствительности по σ, θ и β.

Анализ равновесия выполнен при «замороженных» коэффициентах λ_0, μ_0; влияние периодических возмущений на границы коридора в работе не исследовалось, хотя расчёты на длинном горизонте согласуются с выводами анализа. Наконец, оптимальность найденного управления подтверждена численным сертификатом, а не доказана аналитически: мы не исключаем существования иных локальных решений, хотя все пять запусков прямого метода из различных начальных управлений привели к одному и тому же результату.

D. Что установлено и что не установлено

Установлено: существование оптимального управления; вид оптимального закона и его связь с теневыми ценами; строение и устойчивость равновесия в замкнутой форме; сходимость численного метода с первым порядком по шагу; количественное преимущество оптимальной стратегии на рассмотренном наборе параметров. Не установлено: глобальная оптимальность в аналитическом смысле (вместо неё — численный сертификат); применимость кон-

(cc) BY

кретных значений параметров к реальным проектам; поведение модели при случайных возмущениях и неоднородной команде.

E. Сводка количественных результатов

Основные количественные результаты сведены в табл. XIV.

Таблица XIV.

Основные количественные результаты

Результат	Значение	Где
Функционал J^* при оптимальном управлении	26,504	табл. VIII
Выигрыш над номинальной / агрессивной / лучшей постоянной	4,17 / 14,48 / 4,10 %	табл. VIII
Окно рефакторинга, $u^* \le 0{,}65$	[5,81; 9,14]	рис. 7
Минимум управления	0,593 при t=7,77	рис. 7
Долг в конце горизонта: оптимум / агрессивная	3,037 / 6,001	табл. VIII
Коридор существования равновесия	[0,2975; 0,7393]	табл. IV
Эффективность в равновесии (u=0,65)	75,25 %	табл. IV
Собственные значения (u=0,65)	−0,3292; −0,0812	табл. IV
Стоимость единицы начального долга / бэклога	6,493 / 1,853	табл. II
Сохранение исходного долга: оптимум / агрессивная	26,3 % / 76,3 %	рис. 13
Эмпирический порядок схемы Эйлера	0,98–1,04	табл. V
Разброс J в пяти запусках прямого метода	$< 10^{-12}$	раздел IV-E

Взятые вместе, эти результаты подтверждают основной вывод: распределение мощности команды между разработкой и рефакторингом должно определяться динамически, через баланс теневых цен бэклога и долга, а не выбираться постоянным; при этом верхняя граница доли разработки определяется параметрами обратной связи «долг — производительность».

F. Направления дальнейших исследований

Представляются целесообразными четыре направления. Первое — калибровка модели по историческим данным репозиториев и систем учёта задач и проверка прогнозов на реальных проектах. Второе — стохастическое расширение (случайные потоки задач и дефектов) с оптимизацией ожидаемых издержек или риск-мер. Третье — многокомпонентная модель, различающая типы долга (архитектурный, тестовый, документационный) и неоднородную квалификацию специалистов. Четвёртое — онлайн-режим со скользящим горизонтом и периодической переоценкой параметров, а также выбор терминального штрафа κ по стоимости передачи долга следующему этапу проекта.

IX. Заключение

В работе построена динамическая модель распределения мощности команды в ИТ-проекте, в которой технический долг учитывается как самостоятельная фазовая переменная, связанная с бэклогом контуром отрицательной обратной связи. Задача оптимального распределения мощности поставлена как задача оптимального управления с интегральным критерием и, при необходимости, терминальным штрафом; доказано существование решения и из принципа максимума Понтрягина получен

(cc) BY

замкнутый закон управления, выражающий управление через разность предельной выгоды от ускорения разработки и предельных издержек накопления долга. Показано, что знак второй производной гамильтониана по управлению не доказывает глобальную оптимальность, и вместо этого предложен численный сертификат.

Для положения равновесия получены явные выражения, коридор значений управления [0,2975; 0,7393], в котором оно существует, формула эффективности $1-\sigma x_2^* = (1+\sqrt{D})/2$ и критерий устойчивости $\sigma x_2^* < 1/2$; номинальное управление примера лежит за границей коридора. Двухэтапный численный алгоритм (монотонный шаг Армийо и коллокация краевой задачи) показал первый порядок сходимости схемы Эйлера и устойчивость результата к выбору начального приближения; простая релаксационная прогонка на данной задаче не сходится.

Численные эксперименты выявили трёхфазную структуру оптимального управления с окном рефакторинга на интервале $t \in [5{,}81;\ 9{,}14]$. Оптимальное управление снижает интегральные издержки на 4,17 % по сравнению с номинальной, на 14,48 % по сравнению с агрессивной и на 4,10 % по сравнению с наилучшей постоянной стратегией; долг в конце горизонта в 1,98 раза ниже, чем при агрессивной стратегии. Ограничения работы связаны с детерминированностью модели, однородностью команды, линейной формой деградации и отсутствием калибровки по реальным данным; дальнейшие исследования предполагают стохастическое расширение, учёт неоднородности и валидацию на данных реальных проектов.

Список литературы

1. W. Cunningham, “The WyCash portfolio management system,” *ACM SIGPLAN OOPS Messenger*, vol. 4, no. 2, pp. 29–30, 1992.
2. P. Kruchten, R. L. Nord, and I. Ozkaya, “Technical debt: From metaphor to theory and practice,” *IEEE Software*, vol. 29, no. 6, pp. 18–21, 2012.
3. T. Besker, A. Martini, and J. Bosch, “Software developer productivity loss due to technical debt—A replication and extension study examining developers’ development work,” *J. Systems and Software*, vol. 156, pp. 41–61, 2019.
4. Z. Li, P. Avgeriou, and P. Liang, “A systematic mapping study on technical debt and its management,” *J. Systems and Software*, vol. 101, pp. 193–220, 2015.
5. A. Ampatzoglou, A. Ampatzoglou, A. Chatzigeorgiou, and P. Avgeriou, “The financial aspect of managing technical debt: A systematic literature review,” *Information and Software Technology*, vol. 64, pp. 52–73, 2015.
6. Project Management Institute, *A Guide to the Project Management Body of Knowledge (PMBOK Guide)*, 7th ed. Newtown Square, PA: PMI, 2021.
7. H. Kerzner, *Project Management: A Systems Approach to Planning, Scheduling, and Controlling*, 12th ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2017.
8. T. K. Abdel-Hamid and S. E. Madnick, *Software Project Dynamics: An Integrated Approach*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991.
9. J. D. Sterman, *Business Dynamics: Systems Thinking and Modeling for a Complex World*. Boston, MA: Irwin/McGraw-Hill, 2000.
10. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, 4-е изд. М.: Наука, 1983.
11. R. Bellman, *Dynamic Programming*. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1957.
12. W. H. Fleming and R. W. Rishel, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. New York: Springer-Verlag, 1975.
13. D. E. Kirk, *Optimal Control Theory: An Introduction*. Mineola, NY: Dover, 2004.
14. L. Cesari, *Optimization—Theory and Applications: Problems with Ordinary Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 1983.
15. O. L. Mangasarian, “Sufficient conditions for the optimal control of nonlinear systems,” *SIAM J. Control*, vol. 4, no. 1, pp. 139–152, 1966.

(cc) BY

16. A. Seierstad and K. Sydsæter, *Optimal Control Theory with Economic Applications*. Amsterdam: North-Holland, 1987.
17. S. P. Sethi and G. L. Thompson, *Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics*, 2nd ed. Boston, MA: Springer, 2000.
18. D. Grass, J. P. Caulkins, G. Feichtinger, G. Tragler, and D. A. Behrens, *Optimal Control of Nonlinear Processes: With Applications in Drugs, Corruption, and Terror*. Berlin: Springer, 2008.
19. R. E. Barlow and F. Proschan, *Mathematical Theory of Reliability*. Philadelphia, PA: SIAM, 1996.
20. S. Lenhart and J. T. Workman, *Optimal Control Applied to Biological Models*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2007.
21. E. Trélat and E. Zuazua, "The turnpike property in finite-dimensional nonlinear optimal control," *J. Differential Equations*, vol. 258, no. 1, pp. 81–114, 2015.
22. N. Brown *et al.*, "Managing technical debt in software-reliant systems," in *Proc. FSE/SDP Workshop on Future of Software Engineering Research (FoSER)*, Santa Fe, NM, 2010, pp. 47–52.
23. P. Avgeriou, P. Kruchten, I. Ozkaya, and C. Seaman, "Managing technical debt in software engineering (Dagstuhl Seminar 16162)," *Dagstuhl Reports*, vol. 6, no. 4, pp. 110–138, 2016, doi: 10.4230/DagRep.6.4.110.
24. T. Besker, A. Martini, and J. Bosch, "Managing architectural technical debt: A unified model and systematic literature review," *J. Systems and Software*, vol. 135, pp. 1–16, 2018.
25. L. Kleinrock, *Queueing Systems, Vol. 1: Theory*. New York: Wiley-Interscience, 1975.
26. M. L. Pinedo, *Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems*, 5th ed. New York: Springer, 2016.
27. C. S. Holling, "Some characteristics of simple types of predation and parasitism," *The Canadian Entomologist*, vol. 91, no. 7, pp. 385–398, 1959.
28. R. H. Byrd, P. Lu, J. Nocedal, and C. Zhu, "A limited memory algorithm for bound constrained optimization," *SIAM J. Scientific Computing*, vol. 16, no. 5, pp. 1190–1208, 1995.
29. J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization*, 2nd ed. New York: Springer, 2006.
30. L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3rd ed. New York: Springer, 2001.
31. J. C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, 3rd ed. Chichester: Wiley, 2016.
32. W. W. Hager, "Runge–Kutta methods in optimal control and the transformed adjoint system," *Numerische Mathematik*, vol. 87, no. 2, pp. 247–282, 2000.
33. J. Kierzenka and L. F. Shampine, "A BVP solver based on residual control and the MATLAB PSE," *ACM Trans. Mathematical Software*, vol. 27, no. 3, pp. 299–316, 2001.
34. P. Virtanen *et al.*, "SciPy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in Python," *Nature Methods*, vol. 17, pp. 261–272, 2020.
35. A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri, *Numerical Mathematics*, 2nd ed. Berlin: Springer, 2007.

(cc) BY